عمرو فايز

الملف الرياضيات المراجعة النهائية
موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف العاشر ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

الأفضل للمراجعة
والتفوق

Fayez

الرياضيات

للصف العاشر

المراجعة النهائية

بعد قرار التخفيف

أقوى مراجعة لضمان الدرجة النهائية

حلول دقيقة
حلول واضحة ومقترحة لأسئلة متوقعة

مذكرات شاملة
مذكرات منظمة تغطي نقاط الاختبار الأساسية

حصص مراجعة
شرح أهم الأفكار وحل نماذج امتحانات سابقة

مراجعة مركزة
تلخيص شامل لجميع الوحدات بشكل مبسط

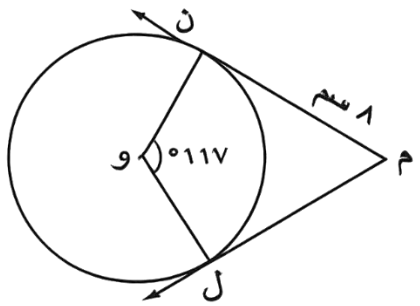
بث مباشر + حصص المراجعة مسجلة + مذكرات محلولة وغير محلولة

للحجز والاستفسار (واتساب):
99421329

أ/عمرو فايز

راجع صح ... وادخل الامتحان وانت واثق،
بإذن الله

10



❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overleftarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة إذا كان

ق (ن و̂ ل) = ١١٧° ، م ن = ٨ سم ، ن و = ٤ سم

١- أوجد ق (ل م̂ ن)　　　　٢- محيط الشكل ل م ن و

الحل

$\overleftarrow{\text{م ل}}$ مماس ، $\overline{\text{و ل}}$ نصف قطر ، ق (م ل̂ و) = ٩٠°

بالمثل : $\overleftarrow{\text{م ن}}$ مماس ، $\overline{\text{و ن}}$ نصف قطر ، ق (م ن̂ و) = ٩٠°

ق (ل م̂ ن) = ٣٦٠ − (١١٧ + ٩٠ + ٩٠) = ٦٣° ①

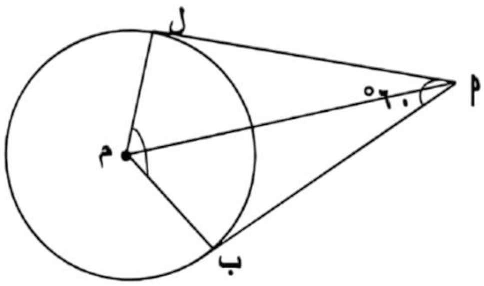
مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

$\overleftarrow{\text{م ن}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ل}}$ مماسان للدائرة ⟵ ∴ م ن = م ل = ٨ سم

القطعتان المماستان للدائرة من نقطة خارجها متطابقتان

$\overline{\text{و ن}}$ = $\overline{\text{و ل}}$ = ٤ سم　　" نصف قطر "

∴ محيط الشكل ل م ن و = ٨ + ٨ + ٤ + ٤ = ٢٤ سم



❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ل}}$ مماسان للدائرة من النقطة أ

، ق (ل أ̂ ب) = ٦٠° ، أوجد :

١- ق (ل م̂ ب)　　　　٢- ق (ل أ̂ م)

الحل

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس ، $\overline{\text{ب م}}$ نصف قطر ، ق (أ ب̂ م) = ٩٠°

$\overline{\text{أ ل}}$ مماس ، $\overline{\text{ل م}}$ نصف قطر ، ق (أ ل̂ م) = ٩٠°

ق (ل م̂ ب) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٦٠) = ١٢٠°

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

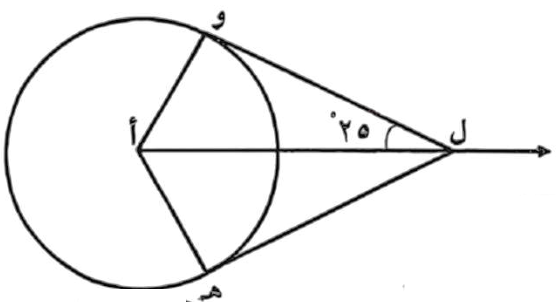
$\overleftarrow{\text{أ م}}$ منصف (ل أ̂ ب)　　∴ ق (ل أ̂ م) = ٣٠°

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها أ ، إذا كانت

ل هـ ، ل و تماسان الدائرة ، فأوجد :

١- ق (أ هـ ل)

٢- ق (ل أ و)



الحل

ل هـ مماس ، أ هـ نصف قطر ، ق (أ هـ ل) = ٩٠°

ل و مماس ، أ و نصف قطر ، ق (ل و أ) = ٩٠°

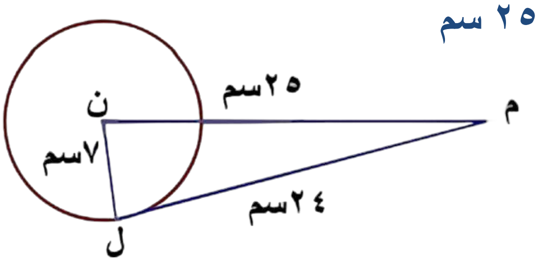
في Δ ل و م :

ق (ل أ و) = ١٨٠ − (٩٠ + ٢٥) = ٦٥°

مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

❖ في الشكل المقابل : ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم

أثبت أن : م ل مماس للدائرة التي مركزها ن



الحل

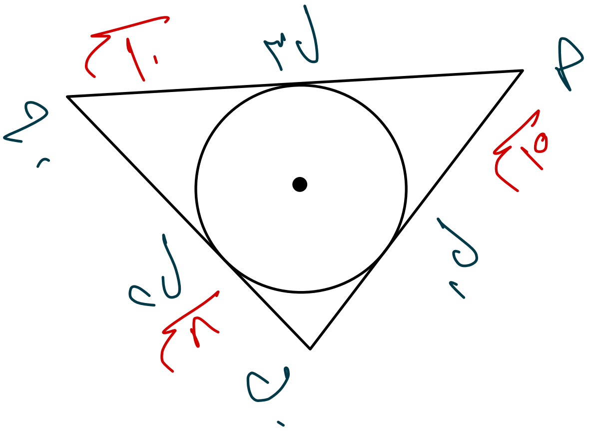
في Δ م ن ل : (م ن)^{٢} = ٢٥^{٢} = ٦٢٥

(ن ل)^{٢} + (م ل)^{٢} = ٧^{٢} + ٢٤^{٢} = ٦٢٥

∴ Δ م ن ل قائم في ل

م ل ⊥ ن ل ، ن ل نصف قطر ∴ م ل مماس

❖ في الشكل المقابل : أوجد محيط المثلث ٯ ب جـ

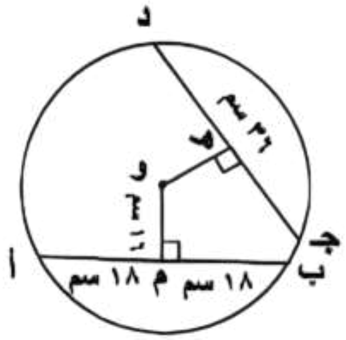


الحل

١. أ ب مماس للدائرة في ل١
٢. ب جـ مماس للدائرة في ل٢
٣. أ جـ مماس للدائرة في ل٣
٤. ٯ ل١ = ٯ ل٣ = ١٥ سم
٥. ب ل١ = ب ل٢ = ٨ سم
٦. جـ ل٢ = جـ ل٣ = ١٠ سم

∴ المحيط = ١٥ + ١٥ + ١٠ + ١٠ + ٨ + ٦ = ٦٦ سم

❖ في الشكل المرسوم : و مركز الدائرة ، و م ⊥ أ ب
و هـ ⊥ جـ د ، و م = ١٦ سم ، أم = م ب = ١٨ سم
جـ د = ٣٦ سم ، أوجد طول و هـ



الحل

أ م = ب م = ١٨ .... معطى

ب م + أ م = أ ب

أ ب = ٣٦

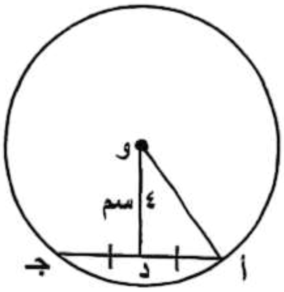
∵ أ ب = جـ د

∴ و هـ = و م .... نظرية

و هـ = ١٦ سم

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، نق = ٥ سم ، و د = ٤ سم ، د منتصف $\overline{أ جـ}$

أوجد بذكر السبب طول $\overline{أ جـ}$



الحل

∵ $\overline{و أ}$ نصف قطر ، $\overline{أ جـ}$ وتر

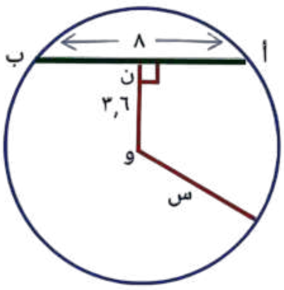
، د منتصف ∴ $\overline{و د} \perp \overline{أ جـ}$

∴ Δ أ و د قائم الزاوية في د

أ د = $\sqrt{(و أ)^2 - (و د)^2}$ = $\sqrt{5^2 - 4^2}$ = ٣

∴ أ جـ = ٣ + ٣ = ٦ سم

❖ أوجد قيمة س



الحل

$\overline{و ن} \perp \overline{أ ب}$ ن منتصف $\overline{أ ب}$

$\overline{أ ن}$ = $\overline{ن ب}$ = ٤ سم

Δ أ ن و قائم

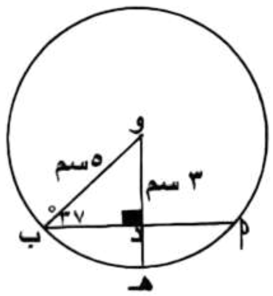
أ و = $\sqrt{(أ ن)^2 + (و ن)^2}$ = $\sqrt{(3,6)^2 + 4^2}$

أ و = ٥,٣٨ سم

∴ س = ٥,٣٨ سم

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، و هـ ⊥ م ب ، ن (م بَ و) = ٣٧° ، أوجد :

١ـ طول م ب   ٢ـ ن (ب هـ)



الحل

∵ المثلث و د ب قائم الزاوية في د

∴ ب د = $\sqrt{(٥)^٢ - (٣)^٢}$ = ٤   " نظرية فيثاغورث "

∵ و د ⊥ م ب ، د منتصف م ب

∴ م د = ب د = ٤ سم

م ب = ٢ × م د = ٢ × ٤ = ٨ سم

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

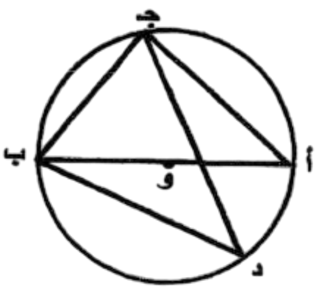
∴ ن (ب وَ د) = ١٨٠ – (٩٠ – ٣٧) = ٥٣°

∵ (ب وَ هـ) زاوية مركزية مرسومة على القوس ب هـ

∴ ق (ب هـ) = ق (ب وَ د) = ٥٣°

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، إذا كان ق (جـ بَ أ) = ٥٠° ، أوجد كلا مما يلي مع ذكر السبب :

١ـ ق (أ جَـ ب)   ٢ـ ق (جـ أَ ب)   ٣ـ ق (جـ دَ ب)



الحل

ق (أ جَـ ب) = ٩٠°   السبب : أ جَـ ب محيطية مرسومة على أ ب قطر للدائرة

ق (جـ أَ ب) = ١٨٠ – (٩٠ + ٥٠) = ٤٠°

السبب : مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

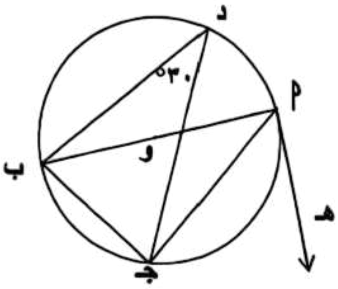
ق (جـ أَ ب) = ق (جـ دَ ب) = ٤٠°

السبب : زاويتان محيطتان مرسومتان على ب جـ

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، أ ب قطر فيها ، أ هـ مماس للدائرة عند أ

ق (ب جـ د) = ٣٠° ، أوجد :

١- ق (أ جـ ب)　　٢- ق (أ ب جـ)　　٣- ق (جـ أ هـ)



الحل

ق (أ جـ ب) = ٩٠°　　السبب : زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة

ق (ب دَ جـ) = ق (ب أَ جـ) = ٣٠°　　①

السبب : زاويتان محيطتان لهما قوس مشترك

∴ ق (أ ب جـ) = ١٨٠ – (٩٠ + ٣٠) = ٦٠°　　②

السبب : مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

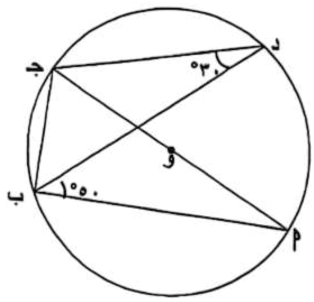
ق (جـ أ هـ) = ق (أ ب جـ) = ٦٠°　　③

السبب : الزاوية الماسية = الزاوية المحيطية لهما قوس مشترك

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، أ جـ قطر فيها ، إذا كان ق (جـ د ب) = ٣٠°

ق (أ ب د) = ٥٠° ، فأوجد كلا من :

١- ق (جـ أ ب)　　٢- ق (أ ب جـ)　　٣- ق (أ د)



الحل

ق (جـ أ ب) = ق (جـ د ب) = ٣٠°

" زاويتان محيطتان مشتركتان في نفس القوس "

ق (أ ب جـ) = ٩٠°

" زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة "

ق (أ د) = ٢ × ق (أ ب د) = ٢ × ٥٠ = ١٠٠°

" قياس الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس "

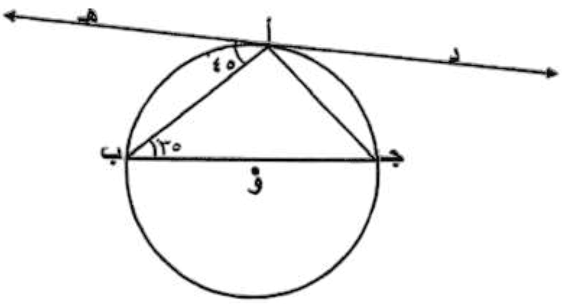
❖ في الشكل المقابل د هـ مماسا للدائرة عند أ ق (أ بَ جـ) = ٣٥° ، ق (هـ أَ ب) = ٤٥°

أوجد مع ذكر السبب :

١- ق (جـ أَ ب)

٢- ق (أ ب)

٣- ق (أ جـ ب)



الحل

ق (أ جـَ ب) = ق (ب أَ هـ) = ٤٥°

السبب : قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

ق (جـ أَ ب) = ١٨٠ – (٤٥ + ٣٥) = ١٠٠°

السبب : مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

ق (أ ب) = ٢ × ق (أ جـَ ب) = ٢ × ٤٥ = ٩٠°

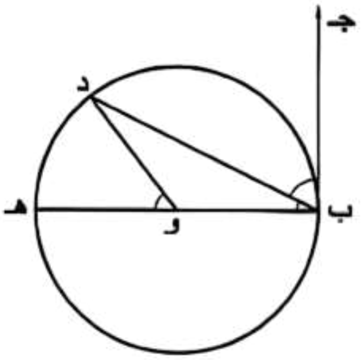
" قياس الزاوية المحيطية = $\frac{١}{٢}$ قياس القوس "

ق (أ جـ ب) = ٣٦٠ – ق (أ ب)

= ٣٦٠ – ٩٠ = ٢٧٠°

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، ب هـ قطر فيها ، ب جـ مماس للدائرة في النقطة ب ،
إذا علمت أن ن (د هـ⌒) = ٥٢° ، أوجد قياسات الزوايا التالية :

١- ن (د و^ هـ)　　　٢- ن (د ب^ هـ)　　　٣- ن (د ب^ جـ)



الحل

ق (د و^ هـ) = ق (د هـ⌒) = ٥٢°

قياس الزاوية المركزية = قياس القوس

ق (د ب^ هـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (د هـ⌒) = $\frac{١}{٢}$ × ٥٢ = ٢٦°

قياس الزاوية المحيطية = $\frac{١}{٢}$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس

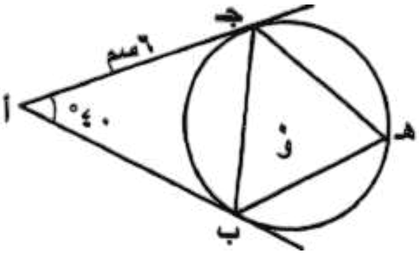
ق (ب د⌒) = ١٨٠ ـ ٥٢ = ١٢٨°

ق (د ب^ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (ب د⌒) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٨ = ٦٤°

قياس الزاوية المماسية = $\frac{١}{٢}$ قياس القوس المشترك معها

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب ، ن (أ) = ٤٠° ، أ جـ = ٦ سم ، أوجد :

١- أ ب　　　٢- ن (أ جـ^ ب)　　　٣- ن (جـ هـ^ ب)



الحل

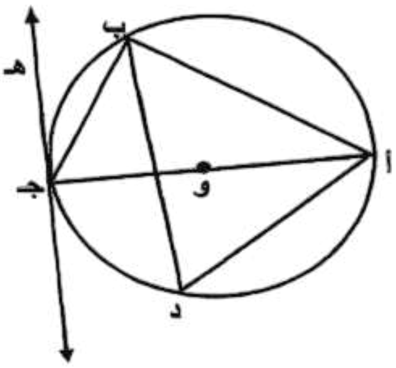
أ ب = أ جـ = ٦ سم　　　السبب : مماسان للدائرة من نقطة خارجها

Δ أ ب جـ متطابق الضلعين

ق (أ جـ^ ب) = ق (أ ب^ جـ) = $\frac{١٨٠-٤٠}{٢}$ = ٧٠°

ق (أ جـ^ ب) = ق (جـ هـ^ ب) = ٧٠°

زاوية مماسية و زاوية محيطية مشتركتان في نفس القوس



❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، هـ جـ مماس للدائرة عند جـ ،

ق (ب جـ هـ) = ٢٨° ، أوجد كل من :

ق (أ ب جـ) ، ق (ب أ جـ) ، ق (أ د ب)

الحل

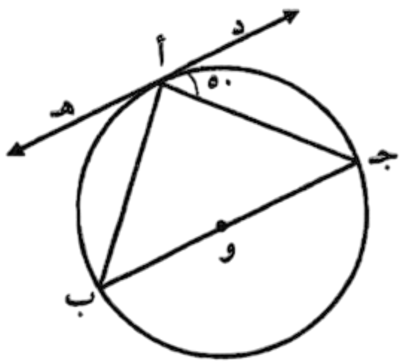
ق (أ ب جـ) = ٩٠° السبب : زاوية محيطية تقابل أ جـ قطر للدائرة

ق (ب جـ هـ) = ق (ب أ جـ) = ٢٨°

السبب : زاوية مماسية و زاوية محيطية لهما قوس مشترك

ق (أ د ب) = ق (أ جـ ب) = ٦٢°

السبب : زاويتان محيطتان لهما أ ب مشترك



❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ،

إذا كان د هـ مماسا للدائرة عند أ ، ق (جـ أ د) = ٥٠°

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

الحل

ق (أ ب جـ) = ق (د أ جـ) = ٥٠°

السبب : زاوية مماسية و الزاوية المحيطة لهما أ جـ مشترك

ق (جـ أ ب) = ٩٠°

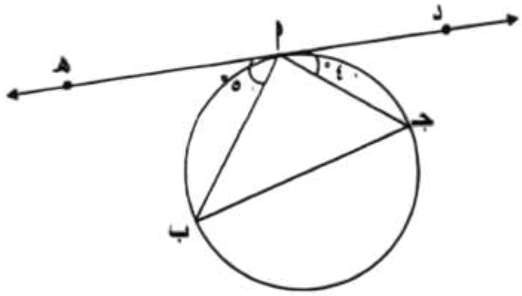
السبب : زاوية محيطية مرسومة على جـ ب قطر الدائرة

ق (أ جـ ب) = ١٨٠ – (٩٠ + ٥٠)

= ١٨٠ – ١٤٠ = ٤٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

❖ في الشكل المقابل ، إذا كان $\overleftrightarrow{د هـ}$ مماس للدائرة عند م ، ق (د م̂ جـ) = ٤٠° ، ق (هـ م̂ ب) = ٥٠° ، أوجد قياسات زوايا المثلث ا ب جـ



الحل

ق (ا ب̂ جـ) = ق (د م̂ جـ) = ٤٠°

السبب : زاوية مماسية و زاوية محيطية لهما $\frown$ ا جـ مشترك

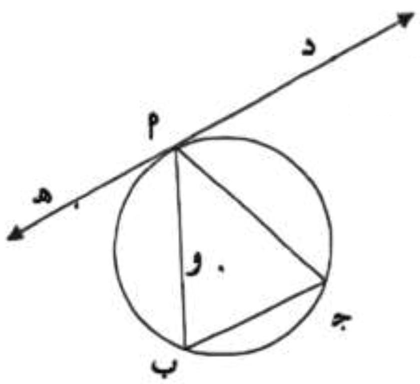
ق (ا جـ̂ ب) = ق (هـ م̂ ب) = ٥٠°

السبب : زاوية مماسية و زاوية محيطية لهما $\frown$ ا ب مشترك

ق (جـ م̂ ب) = ١٨٠ – (٥٠ + ٤٠) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{د هـ}$ مماس لها عند النقطة ا ،
$\overline{ب جـ}$ وتر في الدائرة موازٍ للماس $\overleftrightarrow{د هـ}$
أثبت أن المثلث ا ب جـ متطابق الضلعين



الحل

$\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

ق (د ا̂ جـ) = ق (ا جـ̂ ب) ① تبادل توازي

ق (د ا̂ جـ) = ق (ا ب̂ جـ) ② زاوية مماسية و زاوية محيطية لهما $\frown$ ا جـ مشترك

من ① ، ②

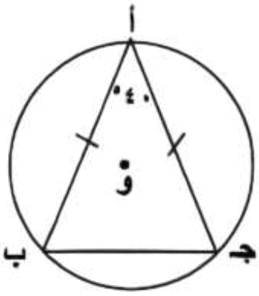
ق (ا جـ̂ ب) = ق (ا ب̂ جـ)

ا جـ = $\overline{ا ب}$ ∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعين

❖ في الشكل المقابل : أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ ، ب ، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ، ق (ب أ̂ جـ) = ٤٠°

أوجد قياس كل من الأقواس

أ ب ، ب جـ ، أ جـ



الحل

قياس الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس

∴ ق (ب أ̂ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (ب جـ)

∴ ق (ب جـ) = ٢ × ٤٠ = ٨٠°

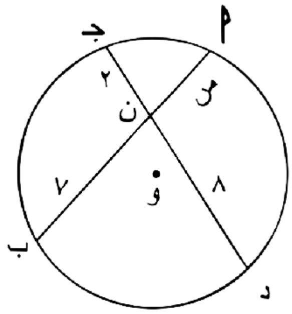
ق (جـ أ ب) = ٣٦٠ − ٨٠ = ٢٨٠°

∵ أ ب = أ جـ

∴ ق (أ ب) = ق (أ جـ) = $\frac{٢٨٠}{٢}$ = ١٤٠°

❖ في الشكل المقابل ، ن جـ = ٢ سم ، ن د = ٨ سم ، ن ب = ٧ سم

أوجد قيمة س



الحل

ن جـ × ن د = ن م × ن ب " نظرية "

٢ × ٨ = س × ٧

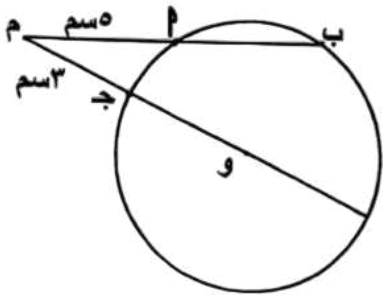
١٦ = ٧ س

$\frac{١٦}{٧}$ = $\frac{٧ س}{٧}$

س = $\frac{١٦}{٧}$ سم

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، طول نصف قطرها يساوي ٦ سم ،
أ م = ٥ سم ، جـ م = ٣ سم

أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$



الحل

جـ د = ٦ + ٦ = ١٢ سم

م أ × م ب = م جـ × م د

٥ × (٥ + أ ب) = ٣ × (٣ + ١٢)

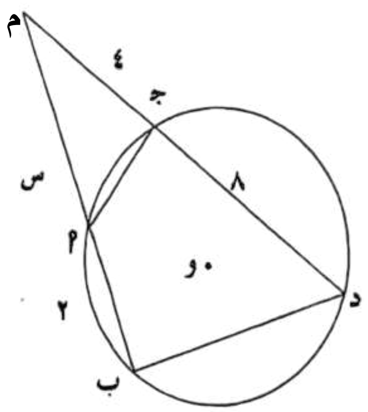
٥ (٥ + أ ب) = ٣ × ١٥

$$٥ + \text{أ ب} = \frac{٣ \times ١٥}{٥}$$

٥ + أ ب = ٩

أ ب = ٩ ـ ٥ = ٤ سم

❖ في الشكل المقابل ، أوجد قيمة س



الحل

م أ × م ب = م جـ × م د

س (س + ٢) = ٤ (٤ + ٨)

س^{٢} + ٢ س ـ ٤٨ = ٠

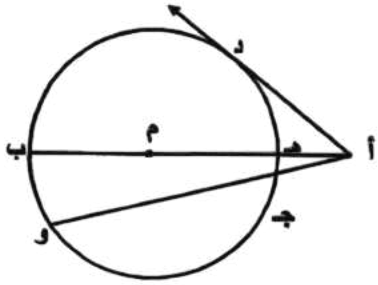
(س + ٨) (س ـ ٦) = ٠

س = ٦ أو س = ـ ٨

فتكون قيمة س = ٦ لأن س = ـ ٨ مرفوضة

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة عند النقطة د ، أ جـ = ٣ سم ،
أ هـ = ٢ سم ، جـ و = ٩ سم ، أوجد كل من :

أ د ، هـ م



الحل

(أ د)^٢ = أ جـ × أ و

= ٣ × ١٢ = ٣٦

أ د = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم ①

أ هـ × أ ب = أ جـ × أ و

٢ × أ ب = ٣ × ١٢

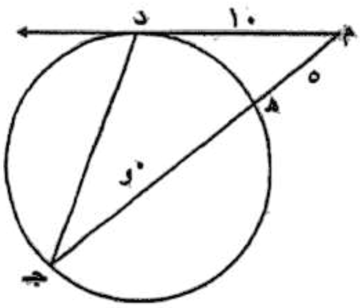
أ ب = ١٨ سم

هـ ب = أ ب ــ أ هـ

= ١٨ ــ ٢ = ١٦

هـ م = $\frac{١}{٢}$ هـ ب = ٨ سم

❖ في الشكل المقابل : $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠ ، م هـ = ٥
أوجد بذكر السبب :
طول كلا من : $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$



الحل

(م د)^٢ = م هـ × م جـ

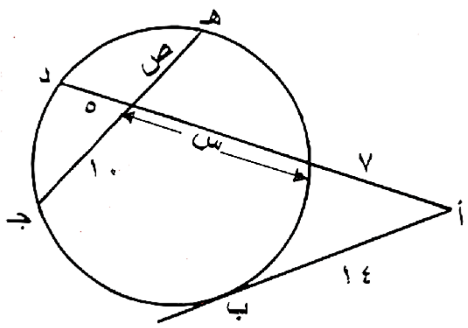
(١٠)^٢ = ٥ × م جـ

م جـ = $\frac{١٠٠}{٥}$ = ٢٠

هـ جـ = م جـ ــ م هـ

= ٢٠ ــ ٥ = ١٥

❖ في الشكل المقابل : أوجد قيمة كل من س ، ص



الحل

٧ × (س + ١٢) = $١٤^{٢}$

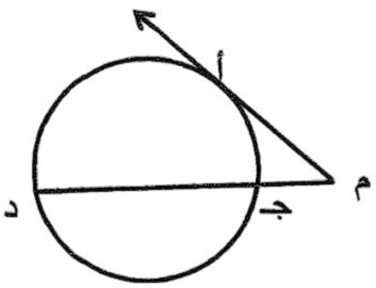
س + ١٢ = $\frac{١٩٦}{٧}$ = ٢٨

س = ٢٨ ـ ١٢ = ١٦

١٠ × ص = ١٦ × ٥

ص = $\frac{١٠ \times ٥}{١٠}$ = ٨

❖ في الشكل المقابل $\overleftarrow{\text{م أ}}$ مماس للدائرة عند أ ، م أ = ٦ سم ،
م جـ = ٣ سم ، أوجد جـ د



الحل

$(\text{م أ})^{٢}$ = م جـ × م د

$٦^{٢}$ = ٣ (٣ + جـ د)

٣٦ = ٩ + ٣ جـ د

٣٦ ـ ٩ = ٣ جـ د

٣ جـ د = $\frac{٢٧}{٣}$

جـ د = ٩ سم

❖ إذا كانت أ = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ، ب = $\begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{vmatrix}$ ، أوجد :

١- ٢ أ − ب

٢- ب$^{-١}$

الحل

(١) ٢ أ − ب = ٢ × $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٦ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢-٢ & ٠-(-٢) \\ -٦-(-٤) & ٤-٥ \end{bmatrix}$

∴ ٢ أ − ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$

(٢) ب$^{-١}$

ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

| ب | = $\begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{vmatrix}$

= -٢ × (-٤) − ٢ × ٥

= ٨ − ١٠ = -٢ ≠ ٠

ب$^{-١}$ = $\frac{١}{|ب|}$ × $\begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix}$

= $-\frac{١}{٢}$ × $\begin{bmatrix} -٢ & -٤ \\ -٢ & -٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢,٥ \end{bmatrix}$

❖ إذا كانت س = $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix}$ ، ص = $\begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ ، أوجد :

١- ٢س − ص

٢- ص٢

الحل

(١) ٢ س − ص = ٢ × $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

∴ ٢ س − ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ -٨ & ٠ \end{bmatrix}$

(٢) ص٢ = ص × ص = $\begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ × $\begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٥ \times ٥ + ٠ \times ٤ & ٥ \times ٠ + ٠ \times ٢ \\ ٤ \times ٥ + ٢ \times ٤ & ٤ \times ٠ + ٢ \times ٢ \end{bmatrix}$

ص٢ = $\begin{bmatrix} ٢٥ & ٠ \\ ٢٨ & ٤ \end{bmatrix}$

❖ إذا كانت أ = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix}$ ، ب = $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix}$ ، أوجد : أ × ب

الحل

أ × ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$ × $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

أ × ب معرفة و رتبتها ٣ × ٢

= $\begin{bmatrix} ٢ \times ٢ + ١ \times ١ & ٢ \times ٤ + ١ \times ٦ \\ ٣ \times ٢ + ٠ \times ١ & ٣ \times ٤ + ٠ \times ٦ \\ ٧ \times ٢ + ٤ \times ١ & ٧ \times ٤ + ٤ \times ٦ \end{bmatrix}$

∴ أ × ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١٤ \\ ٦ & ١٢ \\ ١٨ & ٥٢ \end{bmatrix}$

❖ **إذا كانت أ = $\begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix}$ ، ب = $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix}$ ، أوجد :**

١- أوجد قيمة محدد المصفوفة أ

٢- أ × ب

الحل

① $|أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix}$

$= -٣ \times -٥ - ٤ \times ٢$

$= ٧$

② أ × ب $= \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ & -٣ \times -٣ + ٤ \times -٢ \\ ٢ \times ٢ + (-٥) \times ٣ & ٢ \times -٣ + (-٥) \times -٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ -١١ & ٤ \end{bmatrix}$

❖ **أثبت أن ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$**

الحل

أ × ب = و

أ × ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ \times ٢ + ٣ \times -١ & ٢ \times -٣ + ٣ \times ٢ \\ ١ \times ٢ + ٢ \times -١ & ١ \times -٣ + ٢ \times ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

أ × ب = و

∴ ب نظير ضربي لـــ أ

❖ **حل المعادلة المصفوفية الآتية :**

$$2\text{س} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

الحل

$$2\text{س} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2\text{س} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2\text{س} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{2\text{س}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{10}{2} & \frac{14}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

❖ **حل المعادلة :**

$$4\text{س} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل

$$4\text{س} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\text{س} + \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\text{س} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\text{س} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{4\text{س}}{4} = \begin{bmatrix} \frac{4}{4} & \frac{-8}{4} \\ \frac{8}{4} & \frac{0}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

❖ إذا كانت أ = $\begin{vmatrix} \text{ص} - ٥ & ٢\text{س} + ٤ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} ٢\text{ص} - ٢ & ٤ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ ، أوجد س

الحل

∵ المصفوفتين متساويتين

∴ ٢س + ٤ = ٤

٢س = ٤ − ٤

٢س = ٠

س = ٠

ص − ٥ = ٢ص − ٢

ص − ٢ص = −٢ + ٥

− ص = ٣

ص = − ٣

❖ إذا كانت $\begin{vmatrix} ٤ & \text{س}^٢ \\ \text{ص}^٢ & -٢ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} ٤ & ٩ \\ ٥\text{ص} & -٢ \end{vmatrix}$

أوجد قيمة كلا من س ، ص

الحل

س^٢ = ٩

س = ±$\sqrt{٩}$

س = ± ٣

ص^٢ = ٥ ص

ص^٢ − ٥ ص = ٠

ص (ص − ٥) = ٠

ص = ٠ ، ص = ٥

❖ **أوجد س بحيث :** $\begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix} \times$ س $= \begin{vmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{vmatrix}$ ، **أوجد س**

الحل

نوجد النظير الضربي للمصفوفة : أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$:

$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix} = ٥ \times (-٢) - (-٣) \times ٤ = ٢ \neq ٠$

$أ^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & \frac{٣}{٢} \\ -٢ & \frac{٥}{٢} \end{bmatrix}$

س $= \begin{bmatrix} -١ & \frac{٣}{٢} \\ -٢ & \frac{٥}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \times ٥ + \frac{٣}{٢} \times ١٠ \\ -٢ \times ٥ + \frac{٥}{٢} \times ١٠ \end{bmatrix}$

س $= \begin{bmatrix} ١٠ \\ ١٥ \end{bmatrix}$

❖ **إذا كانت** $\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix}$ = منفردة أوجد قيمة س

الحل

$\because$ **أ منفردة** $\therefore$ **| أ | = صفر**

$\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ ٦ س − ٤ × ١٢ = ٠

٦ س − ٤٨ = ٠

٦س = ٤٨ ÷٦

س = ٨

❖ **استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل النظام :**

$$\begin{cases} \text{س} + ٣\,\text{ص} = ٥ \\ \text{س} + ٤\,\text{ص} = ٦ \end{cases}$$

الحل

نكتب النظام مع معادلة المصفوفات :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} \longrightarrow (١)$$

حيث $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - ٣ \times ١ = ١ \neq ٠$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{١} \times \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$$

و بضرب طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\text{أ}^{-١}$:

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \times ٥ + (-٣) \times ٦ \\ (-١) \times ٥ + ١ \times ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ١

❖ **حل النظام** $\begin{cases} ٥\,س + ٣\,ص = ٧ \\ ٣\,س + ٢\,ص = ٥ \end{cases}$

باستخدام النظير الضربي للمصفوفة

الحل

المعادلة المصفوفية للنظام هي :

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix} \longleftarrow (١)$$

حيث أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٥ \times ٢ - ٣ \times ٣ = ١ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١} \times \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$$

و بضرب المعادلة المصفوفية للنظام (١) من جهة اليمين في $أ^{-١}$:

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

∴ س = -١ ، ص = ٤

❖ **استخدم قاعدة كرامر لحل النظام** $\left\{\begin{array}{l} ٣\text{ س} + ٢\text{ ص} = -٦ \\ -٤\text{ س} - ٣\text{ ص} - ٧ = ٠ \end{array}\right.$

الحل

٣ س + ٢ ص = −٦

−٤ س − ٣ ص = ٧

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix} = -٩ + ٨ = -١$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ ٧ & -٣ \end{vmatrix} = ١٨ - ١٤ = ٤$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١ - ٢٤ = -٣$

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{٤}{-١} = -٤$ $\qquad$ $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٣}{-١} = ٣$

❖ **استخدم قاعدة كرامر لحل النظام** $\left\{\begin{array}{l} ٤\text{ س} - ٥\text{ ص} = -٧ \\ -٦\text{ س} + ٣\text{ ص} = -٣ \end{array}\right.$

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = (٤ \times ٣) - ((-٦) \times (-٥)) = -١٨$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = (-٧ \times ٣) - ((-٣) \times (-٥)) = -٣٦$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = (٤ \times (-٣)) - ((-٦) \times (-٧)) = -٥٤$

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$ $\qquad$ $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$

❖ اكتب المعادلات المصفوفية التالية على شكل نظام معادلات ، ثم حل المعادلة المصفوفية إن أمكن :

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix}$$

الحل

س + ص = ٨

س + ٢ ص = ١٠

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \times ٢ - ١ \times ١ = ١ \neq ٠$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٨ & ١ \\ ١٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٨ \times ٢ - ١ \times ١٠ = ٦$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ١ & ٨ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix} = ١ \times ١٠ - ٨ \times ١ = ٢$

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{٦}{١} = ٦$ $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{٢}{١} = ٢$

❖ حل المعادلة : ٢ جا س − ١ = ٠

الحل

٢ جا س = ١ ← جا س = $\frac{١}{٢}$

جا س = جا $\frac{\pi}{٦}$

جا س > ٠

س تقع في الربع الأول

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π

أو تقع في الربع الثاني

س = $\pi - \frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π

س = $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢ ك π

❖ حل المعادلة : جا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

الحل

∵ جا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∴ جا س = جا $\frac{\pi}{٤}$ ∵ جا س > ٠

∴ $\overset{\frown}{\text{س}}$ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ + ٢ ك π

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ ك π أو س = $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢ ك π

❖ حل المعادلة : جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الحل

∵ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا س = جا $\frac{\pi}{٣}$

∵ جا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ ك π

س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ ك π

❖ حل المعادلة : ٢ جتا س – ١ = ٠

الحل

٢ جتا س – ١ = ٠ ٢ جتا س = ١

جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$

جتا س > ٠

س تقع في الربع الأول أو تقع في الربع الرابع

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ك π س = – $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ك π

❖ حل المعادلة : ٢ جتا س – $\sqrt{٣}$ = ٠

الحل

٢ جتا س – $\sqrt{٣}$ = ٠ ٢ جتا س = $\sqrt{٣}$

جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٦}$

∵ جتا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π أو س = – $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π

❖ حل المعادلة : جتا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

الحل

∵ جتا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∴ جتا س = جتا $\frac{\pi}{٤}$

∵ جتا س > ٠

∴ $\overset{\frown}{\text{س}}$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ ك π أو س = $-\frac{\pi}{٤}$ + ٢ ك π

❖ حل المعادلة : ظا س = $\sqrt{٣}$

الحل

ظا س = $\sqrt{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٣}$

ظا س > ٠

س تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ك π الـ ظا دالة دورية دورتها π

❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة :

إذا كان جا θ $= \frac{12}{13}$ ، جتا θ < 0 ، **أوجد** جتا θ ، ظتا θ

الحل

$\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \text{جتا}^2\theta = 1$

$\text{جتا}^2\theta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$

$\text{جتا}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{25}{169}}$

$\text{جتا} = \frac{-5}{13}$ أو $\text{جتا} = \frac{5}{13}$ (مرفوض لأن جتا θ < 0)

$\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} = \left(\frac{-5}{13} \div \frac{12}{13}\right) = \frac{-5}{12}$

❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جا θ $= \frac{3}{5}$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

فأوجد كلا من : جتا θ ، ظا θ ، قا θ ، ظتا θ ، قتا θ

الحل

$\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \text{جتا}^2\theta = 1$

$\text{جتا}^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \longrightarrow \text{جتا}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{4}{5}$ أو $\text{جتا}\,\theta = -\frac{4}{5}$ مرفوض لأن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\text{ظا} = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \left(\frac{3}{5} \div \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}$

$\text{قا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{5}{4}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{1}{\text{ظا}\,\theta} = \frac{4}{3}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{1}{\text{جا}\,\theta} = \frac{5}{3}$

❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان جتا θ = $\frac{1}{3}$ ، جا θ > ٠

أوجد : جا θ ، ظا θ ، ظتا θ

الحل

جتا^2 θ + جا^2 θ = ١

$\left(\frac{1}{3}\right)^2$ + جا^2 θ = ١

جا^2 θ = ١ − $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ = $\frac{8}{9}$ ⟵ جا θ = $\pm\sqrt{\frac{8}{9}}$

جا = $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ مرفوض أو جا = $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ لأن جا θ > ٠

ظا = $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}$ = $-\frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{1}$ = $-2\sqrt{2}$

ظتا = $\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta}$ = $\frac{1}{3} \times -\frac{3}{2\sqrt{2}}$ = $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان جتا θ = $\frac{3}{5}$ ، جا θ < ٠

فأوجد : جا θ ، ظا θ

الحل

جا^2 θ + جتا^2 θ = ١

جا^2 θ + $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ = ١

جا^2 θ = ١ − $\frac{9}{25}$ = $\frac{16}{25}$ ⟵ جا θ = $\pm\sqrt{\frac{16}{25}}$

أما جا = $\frac{4}{5}$ أو جا = $-\frac{4}{5}$ مرفوضة لأن جا θ < ٠

ظا = $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}$ = $\frac{4}{5} \div \frac{3}{5}$ = $\frac{-4}{3}$

❖ **بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان ظا θ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جا θ > ٠**

أوجد : جا θ ، جتا θ

الحل

قا² θ = ١ + ظا² θ

= ١ + $\left(\frac{١٢}{٥}\right)^{٢}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$ ⟵ قا θ = $\pm\sqrt{\frac{١٦٩}{٢٥}}$

قا θ = $\frac{١٣}{٥}$ قا θ = $-\frac{٣}{٥}$

جا θ > ٠ جتا θ > ٠

قا θ = $\frac{١٣}{٥}$ ∴ جتا = $\frac{١}{\text{قا}\,\theta}$ = $\frac{٥}{١٣}$

جا = ظا × جتا = $\frac{١٢}{٥} \times \frac{٥}{١٣}$ = $\frac{١٢}{١٣}$

❖ **بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان ظا θ = ٢$\sqrt{٢}$ ، جتا θ < ٠**

فأوجد : جتا θ ، جا θ ، قتا θ

الحل

قا² θ + جتا² θ = ١ + ظا² θ

= ١ + $(٢\sqrt{٢})^{٢}$ = ٩ ⟵ قا θ = $\pm\sqrt{٩}$

قا θ = ٣ أو قا θ = −٣

∵ جتا θ < ٠ ∴ قا θ = −٣

∴ جتا θ = $\frac{١}{\text{قا}\,\theta}$ ⟵ جتا = $\frac{-١}{٣}$

جا θ = ظا θ × جتا θ ⟵ جا = ٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{٣}$ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

قتا = $\frac{١}{\text{جا}\,\theta}$ = $\frac{٣}{-٢\sqrt{٢}}$

❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان ظتا θ = $\frac{٥}{٨}$ ، جتا θ < ٠

أوجد : جا θ ، جتا θ

الحل

ظا θ = $\frac{١}{\text{ظتا } \theta}$ = $\frac{٨}{٥}$

قا^٢ θ = ١ + ظا^٢ θ = ١ + $\left(\frac{٨}{٥}\right)^٢$ = $\frac{٨٩}{٢٥}$ ⟵ قا θ = ± $\sqrt{\frac{٨٩}{٢٥}}$

قا θ = $\frac{\sqrt{٨٩}}{٥}$ قا θ = $\frac{-\sqrt{٨٩}}{٥}$ لأن جتا θ < ٠

قا θ = $\frac{\sqrt{٨٩}}{٥}$ ∴ جتا = $\frac{١}{\text{قا } \theta}$ = $\frac{٥\sqrt{٨٩}}{٨٩}$

جا = ظا × جتا = $\frac{٨}{٥}$ × $\frac{٥\sqrt{٨٩}}{٨٩}$ = $\frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩}$

❖ بسط التعبير التالي لأبسط صورة : جتا $(-\theta)$ + جتا $(\pi - \theta)$ − جا $(\pi + \theta)$

الحل

جتا $(-\theta)$ + جتا $(\pi - \theta)$ − جا $(\pi + \theta)$

= جتا (θ) − جتا (θ) + جا (θ)

= جا (θ)

❖ بسط التعبير التالي لأبسط صورة :

جا س + جا (٩٠° − س) + جا (١٨٠° + س) + جا (٩٠° − س)

الحل

جا س + جا (٩٠° − س) + جا (١٨٠° + س) + جا (٩٠° − س)

= جا س + جتا س − جا س + جتا س

= ٢ جتا س

❖ أثبت أن : جا (٩٠° + س) + جتا (١٨٠° − س) + جا (٢٧٠°) + جتا (١٨٠°) = − ٢

الحل

جا (٩٠° + س) + جتا (١٨٠° − س) + جا (٢٧٠°) + جتا (١٨٠°)

= جتا س − جتا س −١ −١

= −٢

❖ أثبت صحة المتطابقة : $\frac{(\text{قا}\,\theta+1)(\text{قا}\,\theta-1)}{\text{جا}^2\,\theta} = \text{قا}^2\,\theta$

الحل

$$\frac{(\text{قا}\,\theta+1)(\text{قا}\,\theta-1)}{\text{جا}^2\,\theta} = \frac{\text{قا}^2\,\theta-1}{\text{جا}^2\,\theta} = \frac{\text{ظا}^2\,\theta}{\text{جا}^2\,\theta}$$

$$= \frac{\cancel{\text{جا}^2\,\theta}}{\text{جتا}^2\,\theta} \times \frac{1}{\cancel{\text{جا}^2\,\theta}} = \frac{1}{\text{جتا}^2\,\theta} = \text{قا}^2$$

❖ أثبت صحة المتطابقة : جتا^3 س + جتا س × جا^2 س = جتا س

الحل

جتا^3 س + جتا س × جا^2 س =

جتا س (جتا^2 س + جا^2 س) =

جتا س × ١ = جتا س

❖ أثبت صحة المتطابقة التالية : (ظا^2 س + ١) جتا^2 س = ١

الحل

(ظا^2 س + ١) جتا^2 س

قا^2 س × جتا^2 س = $\frac{1}{\cancel{\text{جتا}^2\text{ س}}}$ × ~~جتا^2 س~~ = ١

❖ أثبت صحة المتطابقة : (قا^2 θ + قتا^2 θ) − (ظا^2 θ + ظتا^2 θ) = ٢

الحل

(قا^2 θ + قتا^2 θ) − (ظا^2 θ + ظتا^2 θ)

= قا^2 θ − ظا^2 θ + قتا^2 θ − ظتا^2 θ

= ١ + ١ = ٢

❖ إذا كان ا (-٥ ، ٣) ، ب (٧ ، -٤) ، فأوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{ا ب}}$ من جهة ا

بنسبة ١ : ٣ من الداخل

الحل

ا (-٥ ، ٣) ، ب (٧ ، -٤)

١ : ٣

نقطة التقسيم = $\left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}} \right)$

$= \left(\frac{١ \times (٧) + ٣ \times (-٥)}{١ + ٣} ، \frac{١ \times (-٤) + ٣ \times ٣}{١ + ٣} \right)$

$= \left(\frac{-٨}{٤} ، \frac{٥}{٤} \right)$

$= \left(-٢ ، \frac{٥}{٤} \right)$

❖ إذا كان ا (٢ ، ٤) ، ب (٥ ، ٩) ، فأوجد جـ التي تقسم $\overline{\text{ا ب}}$ من الداخل

بنسبة ٣ : ٥ من جهة ا

الحل

ا (٢ ، ٤) ، ب (٥ ، ٩)

٣ : ٥

نقطة التقسيم = $\left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}} \right)$

$= \left(\frac{٣ \times ٥ + ٥ \times ٢}{٣ + ٥} ، \frac{٣ \times ٩ + ٥ \times ٤}{٣ + ٥} \right)$

$= \left(\frac{٢٥}{٨} ، \frac{٤٧}{٨} \right)$

❖ إذا كان أ(٣ ، -٤) ، ب (-٢ ، ٣) ، فأوجد جـ بحيث ٢ أجـ = جـ ب ، جـ ∈ $\overline{\text{أب}}$

(إرشاد : أجـ = جـ ب = ١ : ٢)

الحل

٢ أجـ = جـ ب   ∴ نسبة التقسيم = ١ : ٢ جهة أ

أ(٣ ، -٤) ، ب (-٢ ، ٣)

١ : ٢

$$\text{نقطة التقسيم} = \left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م}+\text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م}+\text{ن}} \right)$$

$$= \left(\frac{١ \times (-٢) + ٢ \times ٣}{١ + ٢} ، \frac{١ \times ٣ + ٢ \times -٤}{١ + ٢} \right)$$

$$= \left(\frac{٤}{٣} ، \frac{-٥}{٣} \right)$$

❖ أثبت أن النقاط : أ(٢ ، -١) ، ب (-١ ، ٥) ، جـ (٣ ، -٣) على استقامة واحدة

الحل

$$\text{ميل أب} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٥-(-١)}{-١-٢} = \frac{٦}{-٣} = -٢$$

$$\text{ميل أب} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{-٣-(-١)}{٣-٢} = \frac{٦}{-٣} = -٢$$

ميل أب = ميل أجـ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{أجـ}}$

أ نقطة مشتركة

∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

❖ اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ (١ ، ٣) ، ب (-٢ ، ٠)

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ← م = $\frac{٠ - ٣}{-٢ - ١}$ = ١

معادلة $\overleftrightarrow{أب}$:

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٣ = ١ (س − ١)

ص − ٣ = س − ١

ص = س − ١ + ٣

ص = س + ٢

❖ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ و يمر بالنقطة (-٦ ، ٥)

الحل

معادلة الخط المستقيم :

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٥ = $-\frac{٢}{٣}$ (س + ٦)

ص − ٥ = $-\frac{٢}{٣}$ س − ٤

ص = $-\frac{٢}{٣}$ س − ٤ + ٥

ص = $-\frac{٢}{٣}$ س + ١

❖ أوجد معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل و الذي يمر بالنقطة (٢ ، -٣) حيث $\overleftrightarrow{ل}$: ص = ٢ س + ١

الحل

∵ المستقيمان ل ، هـ متوازيان ∴ ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل = ٢

∴ معادلة المستقيم هـ هي :

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − (− ٣) = ٢ (س − ٢)

ص = − ٣ + ٢ س − ٤

ص = ٢ س − ٧

❖ إذا كان المستقيم ك : ٣ ص + س + ٣ = ٠ فأوجد :
معادلة المستقيم ل الموازي للمستقيم ك و الذي يمر بالنقطة (−٣ ، ٢)

الحل

ميل المستقيم ك = $\frac{-١}{٣}$

∵ المستقيمان ك ، ل متوازيان ∴ ميل المستقيم ك = ميل المستقيم ل = $\frac{-١}{٣}$

معادلة المستقيم ل هي :

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ٢ = $\frac{-١}{٣}$ (س − (-٣))

ص − ٢ = $\frac{-١}{٣}$ (س + ٣)

ص − ٢ = $\frac{-١}{٣}$ س − ١ ⟵ ص = $\frac{-١}{٣}$ س + ١

❖ إذا كان المستقيم ل : ص = ٢ س + ١

أوجد معادلة المستقيم ك العمودي على المستقيم ل و يمر بالنقطة (٤ ، -٣)

الحل

∵ ميل المستقيم ل = ٢ ← ∵ المستقيمان ل ، ك متعامدان

ميل المستقيم ك = $\frac{-١}{\text{ميل المستقيم ل}}$ ← ∴ ميل المستقيم ك = $-\frac{١}{٢}$

معادلة المستقيم ك هي :

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − (-٣) = $-\frac{١}{٢}$ (س − ٤)

ص + ٣ = $-\frac{١}{٢}$ س + ٢

ص = $-\frac{١}{٢}$ س − ١

❖ إذا كان المستقيم ك : ٣ ص + س + ٣ = ٠ ، فأوجد معادلة المستقيم ب العمودي على المستقيم ك و الذي يمر بالنقطة (١ ، ٤)

الحل

$\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = $\frac{-١}{٣}$ س − ١ ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = $\frac{-١}{٣}$

المستقيمان ك ، ب متعامدان

ميل المستقيم ب = $\frac{-١}{\text{ميل المستقيم ك}}$ = $\frac{-١}{\frac{-١}{٣}}$ = ٣

∴ معادلة المستقيم ب :

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ٤ = ٣ (س − ١)

ص − ٤ = ٣ س − ٣

ص = ٣ س − ٣ + ٤

ص = ٣ س + ١

❖ أوجد البعد بين النقطة جـ (٢ ، ١) و المستقيم : ٣ س – ص – ١ = ٠

الحل

البعد ف = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

أ = ٣ ب = -١ جـ = -١

س١ = ٢ ص١ = ١

ف = $\frac{|(٣)(٢) + (-١)(١) + (-١)|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-١)^٢}}$

ف = $\frac{|(٦) + (-١) + (-١)|}{\sqrt{٩ + ١}}$ = $\frac{|٤|}{\sqrt{١٠}}$

ف = $\frac{٤}{\sqrt{١٠}}$ = $\frac{٢\sqrt{١٠}}{٥}$ وحدة طول

❖ أوجد البعد بين المستقيم ل : ص = -س + ٣ و النقطة د (٢ ، ٥)

الحل

معادلة $\overleftrightarrow{ل}$: س + ص – ٣ = ٠

أ = ٣ ب = -١ جـ = -١

س١ = ٢ ص١ = ١

ف = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

ف = $\frac{|١ \times ٢ + ١ \times ٥ + (-٣)|}{\sqrt{(١)^٢ + (١)^٢}}$

ف = $\frac{|٢ + ٥ - ٣|}{\sqrt{١ + ١}}$

ف = $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$

ف = ٢ $\sqrt{٢}$

❖ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، -٢) و طول نصف قطرها ٧ وحدات

الحل

المركز (٣ ، -٢)　　　د = ٣　　　هـ = -٢

نصف القطر " نق " = ٧

معادلة الدائرة (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

(س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤٩

❖ أوجد مركز و طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها :

(س + ٢)^{٢} (ص − ٣)^{٢} = ٩

الحل

∵ (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

د = -٢　　　هـ = ٣

نق^{٢} = ٩ ⇐ نق = ٣

مركز الدائرة (-٢ ، ٣) و طول نصف قطر الدائرة = ٣ وحدة

❖ عين مركز و طول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة :

$٣ س^٢ + ٣ ص^٢ - ٦ س + ٩ ص - ١٢ = ٠$

الحل

$٣ س^٢ + ٣ ص^٢ - ٦ س + ٩ ص - ١٢ = ٠$ (÷ ٣)

$س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٣ ص - ٤ = ٠$

و هي معادلة دائرة على الصورة العامة :

∴ ل = -٢ ، ك = ٣ ، ب = -٤

المركز = $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right)$

∴ مركز الدائرة (١ ، $\frac{-٣}{٢}$)

نوجد طول نصف قطر الدائرة :

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ ب}$

= $\frac{١}{٢}\sqrt{٤ + ٩ - ٤ \times (-٤)}$

= $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$ وحدة طول

❖ أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أ ب}$ حيث أ (٤ ، -٢) ، ب (٢ ، ٤)

الحل

مركز الدائرة = $\left(\frac{٤+٢}{٢} ، \frac{-٢+٤}{٢}\right)$ = (٣ ، ١)

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\frac{١}{٢}\sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (٤ + ٢)^٢}$ = $\sqrt{١٠}$

∴ معادلة الدائرة هي :

$(س - س_١)^٢ + (ص - ص_١)^٢ = نق^٢$

$(س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٠$

❖ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها : $(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٥$

عند نقطة التماس أ (٣ ، ١)

الحل

مركز الدائرة النقطة و (١ ، ٢)

ميل $\overline{و أ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{١ - ٢}{٣ - ١}$ = $- \frac{١}{٢}$

∵ نصف قطر التماس $\overline{و أ}$ عمودي على مماس الدائرة

ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل نصف قطر التماس}}$ = ٢

∴ معادلة المماس هي :

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ١ = ٢ (س - ٣)

ص - ١ = ٢ س - ٦

ص = ٢ س - ٥

❖ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها : $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ٨$

عند نقطة أ (٠ ، ٢)

الحل

مركز الدائرة (٢ ، ٠)

ميل نصف القطر = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٢ - ٠}{٠ - ٢}$ = - ١

∵ نصف قطر التماس عمودي على مماس الدائرة

ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل نصف قطر التماس}}$ = $\frac{-١}{-١}$ = ١

∴ معادلة المماس هي :

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ٢ = ١ (س - ٠)

ص - ٢ = س

ص = س + ٢