*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا com.kwedufiles.www//:https

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر العلمي اضغط هنا

https://kwedufiles.com/14

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر العلمي في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://kwedufiles.com/14math

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر العلمي في مادة رياضيات الخاصة بـ الفصل الثاني اضغط هنا

https://www.kwedufiles.com/14math2

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر العلمي اضغط هنا

https://www.kwedufiles.com/grade14

للحصول على جميع روابط الصفوف على تلغرام وفيسبوك من قنوات وصفحات: اضغط هنا bot_kwlinks/me.t//:https

الروابط التالية هي روابط الصف الثاني عشر العلمي على مواقع التواصل الاجتماعي

مجموعة الفيسبوك

صفحة الفيسبوك

مجموعة التلغرام

بوت التلغرام

قناة التلغرام

رياضيات على التلغرام

5-5 التكامل بالتجزيء

① $\int x \cos 3x \, dx =$

$u = x \qquad dv = \cos 3x \, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{3} \sin 3x$

$= \frac{1}{3} x \cdot \sin 3x - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \sin 3x \, 3 dx$

$= \frac{1}{3} x \cdot \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$

② $\int x \sin 5x \, dx$

$u = x \qquad dv = \sin 5x \, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{-1}{5} \cos 5x$

$= \frac{-1}{5} x \cos 5x + \frac{1}{5} \int \cos 5x \, dx$

$= \frac{-1}{5} x \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C$

③ $\int x e^{x-3} dx \qquad u = x \qquad dv = e^{x-3} dx$

$du = dx \qquad v = e^{x-3}$

$= x \cdot e^{x-3} - \int e^{x-3} dx$

$= x e^{x-3} - e^{x-3} + C$

④ $\int (x-5)\, e^{x-5}\, dx$

$u = x-5 \qquad dv = e^{x-5}$

$du = dx \qquad v = e^{x-5}$

$= (x-5)\, e^{x-5} - \int e^{x-5}\, dx$

$= (x-5)\, e^{x-5} - e^{x-5} + c$

---

⑤ $\int \ln \sqrt[4]{x}\, dx = \frac{1}{4} \int \ln|x|\, dx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$

$= \frac{1}{4}\left[x \ln x - \int x \frac{dx}{x}\right] = \frac{1}{4}\left[x \ln x - x\right] + c$

---

⑥ $\int \ln(2x-1)\, dx$

نفرض: $z = 2x-1$

$dz = 2\, dx$

$= \frac{1}{2} \int \ln(2x-1)\, 2\, dx$

$= \frac{1}{2} \int \ln z\, dz$

$u = \ln z \qquad dv = dz$

$du = \frac{1}{z} dz \qquad v = z$

$= \frac{1}{2}\left[z \ln z - \int \frac{1}{z} \cdot z\, dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(2x-1) \ln(2x-1) - (2x-1)\right] + c$

⑦ $I = \int (2x+1)\ln(x+1)\,dx$

$u = \ln(x+1)$ $\qquad$ $dv = (2x+1)\,dx$

$du = \frac{1}{x+1}\,dx$ $\qquad$ $v = x^2 + x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$= x(x+1)\ln(x+1) - \int x(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$

$= (x^2+x)\ln(x+1) - \int x\,dx$

$= (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C$

(8) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{x^2}\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{-1}{x}$

$= -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \frac{-1}{x}\ln x + \int x^{-2}\,dx$

$= \frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$

(9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}} \ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln|x| - \frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln|x| - \frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}} + C$

(10) $\int x^2 \ln x^2\,dx$

$u = \ln x^2 \qquad dv = x^2\,dx$

$du = \frac{2x}{x^2}\,dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$= \frac{x^3}{3}\ln x^2 - \int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{2}{x}\,dx$

$= \frac{x^3}{3}\ln x^2 - \frac{2}{3}\,\frac{x^3}{3} + C$

$= \frac{x^3}{3}\ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C$

(11) $I = \int (x^2 - 2x)\cos x\, dx$

$u = x^2 - 2x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = (2x-2)\,dx \qquad v = \sin x$

$I = (x^2-2x)\sin x - \int (2x-2)\sin x\, dx$

$u = 2x-2 \qquad dv = -\sin x\, dx$

$du = 2\,dx \qquad v = -\cos x$

$I = (x^2-2x)\sin x - \left[(2x-2)(-\cos x) + \int \cos x \cdot 2\,dx\right]$

$= (x^2-2x)\sin x + (2x-2)\cos x - 2\sin x + C$

(12) $I = \int (x^2+3x)\sin x\, dx$

$u = x^2+3x \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = (2x+3)\,dx \qquad v = -\cos x$

$I = (x^2+3x)(-\cos x) + \int \cos x\,(2x+3)\,dx$

$u = 2x+3 \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = 2\,dx \qquad v = \sin x$

$= -(x^2+3x)\cos x + (2x+3)\sin x - 2\int \sin x\, dx$

$= -(x^2+3x)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x + C$

(13) $I = \int x^2 e^{x+1} dx$

$u = x^2 \qquad dv = e^{x+1} dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = e^{x+1}$

$I = x^2 e^{x+1} - \int 2x e^{x+1} dx$

$u = 2x \qquad dv = e^{x+1} dx$

$du = 2dx \qquad v = e^{x+1}$

$I = x^2 e^{x+1} - [2x e^{x+1} - \int 2 e^{x+1} dx]$

$= x^2 e^{x+1} - 2x e^{x+1} + 2 e^{x+1} + c$

---

(14) $I = \int x^2 e^{2x-3} dx$

$u = x^2 \qquad dv = \frac{1}{2} e^{2x-3} 2\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$I = \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3} - \int \frac{1}{2} e^{2x-3} 2x\,dx$

$u = x \qquad dv = \frac{1}{2} e^{2x-3} 2\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$I = \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3} - [\frac{1}{2} e^{2x-3} \cdot x - \frac{1}{2}\frac{1}{2} \int e^{2x-3} 2\,dx$

$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2} x e^{2x-3} + \frac{1}{4} e^{2x-3} + c$

(15) $I = \int (\ln x)^2 \, dx$

$u = (\ln x)^2 \qquad dv = dx$

$du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

$I = x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

$I = x(\ln x)^2 - 2\left[x \ln x - \int dx\right]$

$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

---

(16) $I = \int e^{2x} \sin x \, dx$

$u = e^{2x} \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = 2e^{2x} dx \qquad v = -\cos x$

$I = -e^{2x} \cos x + \int 2e^{2x} \cos x \, dx$

$u = e^{2x} \qquad dv = \cos x$

$du = 2e^{2x} \qquad v = \sin x$

$I = -e^{2x} \cos x + 2\left[e^{2x} \sin x - \int 2e^{2x} \sin x \, dx\right]$

$= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 2I$

$3I = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + C$

$I = \frac{1}{3}\left[-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x\right] + C$

طريقة ثانية

⑦ $I = \int (2x+1) \ln(x+1)\, dx$

$z = x+1 \Rightarrow x = z-1$

$dz = dx$

$2x = 2z-2$

$2x+1 = 2z-1$

$I = \int (2z-1) \ln z\, dz$

$= \int 2z \ln z\, dz - \int \ln z\, dz$

$u_1 = \ln z \quad dv_1 = 2z\, dz \quad u_2 = \ln z \quad dv_2 = dz$

$du_1 = \frac{dz}{z} \quad v_1 = z^2 \quad du_2 = \frac{dz}{z} \quad v_2 = z$

$I = z^2 \ln z - \int z\, dz - [z \ln z - \int dz$

$= z^2 \ln z - \frac{1}{2} z^2 - z \ln z + z + c$

$= (x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 - (x+1)\ln(x+1) + (x+1) + c$

⑦ $\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx$ «طريقة أخرى»

$= \int (2x+1+1-1)\ln(x+1)\,dx$

$= \int (2x+2)\ln(x+1) - \ln(x+1)\,dx$

$= 2\int (x+1)\ln(x+1)\,dx - \int \ln(x+1)\,dx$

I_1 $\qquad$ I_2

$I_1 = \int (x+1)\ln(x+1)\,dx$

$z = x+1 \Rightarrow dz = dx$

$= \int z \ln z\,dz$

$u = \ln z \qquad dv = z\,dz$

$du = \frac{dz}{z} \qquad v = \frac{z^2}{2}$

$= \frac{z^2}{2}\ln z - \int \frac{z^2}{2}\cdot\frac{dz}{z}$

$= \frac{z^2}{2}\ln z + \frac{1}{4}z^2 + c = \frac{(x+1)^2}{2}\ln|x+1| + \frac{(x+1)^2}{4} + c$

$I_2 = \int \ln(x+1)\,dx = \int \ln|z|\,dz$

$u = \ln z \qquad dv = dz$

$du = \frac{1}{z}dz \qquad v = z$

$= z\ln z - \int \frac{1}{z}\cdot z\,dz$

$= z\ln|z| - z + c = (x+1)\ln|x+1| - (x+1) + c$

$\therefore I = 2\left[\frac{(x+1)^2}{2}\cdot\ln|x+1| + \frac{(x+1)^2}{4}\right] - \left[(x+1)\ln|x+1| + (x+1)\right] + c$

(17) $I = \int \sin(\ln x)\, dx$

نفرض

$$z = \ln x \Rightarrow x = e^z$$

$$dz = \frac{1}{x} dx$$

$$x\, dz = dx$$

$$e^z dz = dx$$

نفرض:

$$I = \int e^z \sin z\, dz \qquad u = e^z \quad dv = \sin z$$

$$du = e^z dz \quad v = -\cos z$$

$$= -e^z \cos z + \int e^z \cos z\, dz$$

$$u = e^z \quad dv = \cos z$$

$$du = e^z dz \quad v = \sin z$$

$$I = -e^z \cos z + e^z \sin z - \int e^z \sin z\, dz$$

$$I = -e^z \cos z + e^z \sin z - I$$

$$2I = -e^z \cos z + e^z \sin z + c$$

$$I = \frac{1}{2}\left[-e^{\ln x} \cos(\ln x) + e^{\ln x} \sin(\ln x)\right] + c$$

$$I = -\frac{1}{2} x \cos(\ln x) + \frac{1}{2} x \sin(\ln x) + c$$

طريقة أخرى

(17) $I = \int \sin(\ln x)\, dx$

$u = \sin(\ln x)$ $\qquad dv = dx$

$du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\, dx$ $\qquad v = x$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$I = x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$= x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx \quad \rightarrow (1)$

$u = \cos(\ln x)$ $\qquad dv = dx$

$du = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\, dx$ $\qquad v = x$

$I_1 = \int u\, dv = uv - \int v\, du$

$I_1 = x \cdot \cos(\ln x) - \int -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot x\, dx$

$= x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx \quad \rightarrow (2)$

نعوض (2) في (1):

$I = x \sin(\ln x) - \left(x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx\right)$

$I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$

$2I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) + C$

$I = \frac{1}{2} x \sin(\ln x) - \frac{1}{2} x \cos(\ln x) + C$