الملف مراجعة نهائية حول التكامل المحدد وغير المحدد بالتعويض والتجزئة وتكامل الدوال الكسرية

مراجعات غير مخصصة للبيع
المصدر
الكتاب المدرسي
وزارة التربية/ الكويت
طبعة
2025/ 2026 م
خاصة بطلبة مدارس التميز النموذجية

مدرسة التميز النموذجية ابتدائي - متوسط - ثانوي

# المراجعة النهائية

# مادة الرياضيات

# الصف الثاني عشر علمي

2025 / 2026
الفصل الدراسي الثاني

..............................................................................................................

(1) أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \ dx$

(2) أوجد:

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^{5}}{x^{2}}\,dx$$

(3) أوجد:

$$\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1}\,dx$$

**(4)**

**أوجد:** $\int x(x+1)^5 dx$

(5) أوجد:

$$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25 - x^2}\, dx$$

(6) أوجد:

$$\int (x - 2)e^{x-2}\, dx$$

(7) لتكن الدالة $f$: $f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$

فأوجد :

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\, dx$

(8) أوجد:

$$\int \frac{3x - 13}{x^2 - 8x + 15} dx$$

(9) أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميل العمودي على منحناه عند أي نقطة $(x, y)$ يساوي $3x^2$ ويمر بالنقطة $(1, 5)$

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$: $f(x) = \frac{2}{9}\ (9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2, 5]$

**(11)**

**أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات**

(12) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات

والمحددة بمنحنى الدالتين $y_1 = \sqrt{1 - x^2}, \quad y_2 = 0$

(13)

لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد

فأوجد:

(1) رأسي القطع الزائد

(2) البؤرتين

(3) معادلة كل من الخطين المقاربين

(1) أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \ dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} u \, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{2})^2}{2}\right] - \left[\frac{(1)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$u = \sec x$

$du = \sec x \cdot \tan x \, dx$

عندما

$x = 0 \therefore u = \sec(0) = \frac{1}{\cos(0)} = 1$

$x = \frac{\pi}{4} \therefore u = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$

(2) أوجد:

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x}+4\right)^5 \cdot \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int -u^5\,du$$

$$= -\frac{u^6}{6} + c$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6 + c$$

$$u = \frac{1}{x} + 4$$

$$du = \frac{-1}{x^2}\,dx$$

$$-du = \frac{1}{x^2}\,dx$$

(3) أوجد:

$$\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(x+1)}(x+4)}{\cancel{x+1}} dx$$

$$= \int (x+4)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$$

(4)

أوجد: $\int x(x+1)^5 dx$

$$\int (x+1)^5 \, x \, dx$$

$$= \int u^5 (u-1) \, du$$

$$= \int u^6 - u^5 \, du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + c$$

$$= \frac{1}{7}(x+1)^7 - \frac{1}{6}(x+1)^6 + c$$

$u = x+1$

$du = 1 dx$

$u - 1 = x$

(5) أوجد:

$$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25 - x^2}\, dx$$

نفرض $y = -\sqrt{25 - x^2}$

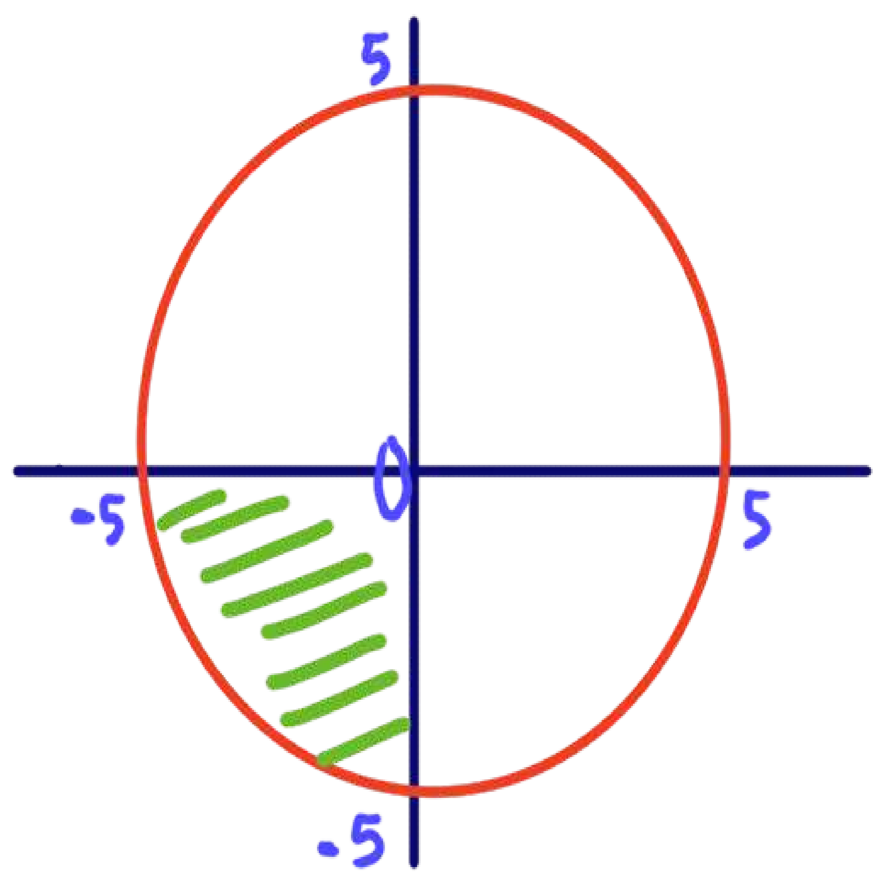
بالتربيع $y^2 = \left(-\sqrt{25 - x^2}\right)^2$

$y^2 = 25 - x^2 \quad \therefore \; y^2 + x^2 = 25$

هذه معادلة دائرة

مركزها نقطة الأصل $(0,0)$

طول نصف قطرها $r = \sqrt{25} = 5$




$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25 - x^2}\, dx =$ − مساحة المنطقة المظللة

$= -\frac{1}{4}\pi r^2$

$= -\frac{1}{4}\pi (5)^2 = \frac{-25}{4}\pi$

(6) أوجد:

$$\int (x - 2)e^{x-2}\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$u = (x-2)$ $\quad dv = e^{x-2}dx$

$du = 1\,dx$ $\quad v = e^{x-2}$

$$\int (x-2)e^{x-2}dx = (x-2)e^{x-2} - \int e^{x-2}dx$$

$$= (x-2)e^{x-2} - e^{x-2} + c$$

(7) لتكن الدالة $f$: $f(x) = \dfrac{2}{(x-5)(x-3)}$

فأوجد :

ⓐ الكسور الجزئية

ⓑ $\int f(x)\,dx$

- $(x-5)(x-3)$
- $f(x) = \dfrac{2}{(x-5)(x-3)} = \dfrac{A_1}{(x-5)} + \dfrac{A_2}{(x-3)}$
- $2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$

نعوض

- $x=5 \therefore 2 = A_1(5-3) + \cancel{A_2(5-5)} \therefore A_1 = 1$

$x=3 \therefore 2 = \cancel{A_1(3-3)} + A_2(3-5) \therefore A_2 = -1$

- $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)} + \dfrac{-1}{(x-3)}$

- $\int f(x)dx = \int \dfrac{1}{(x-5)}dx + \int \dfrac{-1}{(x-3)}dx$

$= \frac{1}{1}\ln|x-5| + \frac{-1}{1}\ln|x-3| + c$

$= \ln|x-5| - \ln|x-3| + c$

(8) أوجد:

$$\int \frac{3x - 13}{x^2 - 8x + 15} dx$$

$x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x-3)$

MODE 5 3

a b c

1 = −8 = 15 =

$\boxed{x_1 = 5 \quad x = 3}$

$$f(x) = \frac{3x - 13}{(x-5)(x-3)} = \frac{A_1}{(x-5)} + \frac{A_2}{(x-3)}$$

$$3x - 13 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$$

عندما

$x = 5 \quad \therefore 3(5) - 13 = A_1(5-3) + \cancel{A_2(5-5)} \quad \therefore A_1 = 1$

$x = 3 \quad \therefore 3(3) - 13 = \cancel{A_1(3-3)} + A_2(3-5) \quad \therefore A_2 = 2$

$$f(x) = \frac{1}{(x-5)} + \frac{2}{(x-3)}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{(x-5)} dx + \int \frac{2}{(x-3)} dx$$

$$= 1 \ln|x-5| + \frac{2}{1} \ln|x-3| + c$$

$$= \ln|x-5| + 2\ln|x-3| + c$$

(9) أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميل العمودي على منحناه عند أي نقطة $(x, y)$ يساوي $3x^2$ ويمر بالنقطة $(1, 5)$

ميل العمودي $= 3x^2$

ميل المنحنى $= \dfrac{-1}{\text{ميل العمودي}} = \dfrac{-1}{3x^2} = -\frac{1}{3}x^{-2}$

$\therefore f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-2}$

$\therefore f(x) = \int -\frac{1}{3}x^{-2}\,dx$

$= -\frac{1}{3}\dfrac{x^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{1}{3}x^{-1} + c$

$\therefore f(x) = \dfrac{1}{3x^1} + c$

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة $(1, 5)$

$\therefore f(1) = 5$

$\therefore f(1) = \dfrac{1}{3(5)} + c \qquad \therefore c = \dfrac{14}{3}$

$\therefore f(x) = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{14}{3}$

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$: $f(x) = \frac{2}{9}\ (9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2,5]$

طول القوس $L = \int_2^5 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \frac{2}{9}(\frac{3}{2})(9+3x)^{\frac{1}{2}}(3)$

$f'(x) = (9+3x)^{\frac{1}{2}}$

$(f'(x))^2 = ((9+3x)^{\frac{1}{2}})^2$

$= 9+3x$

$\therefore L = \int_2^5 \sqrt{1+9+3x}\,dx$

$= \int_2^5 (10+3x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \left[(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})(10+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$

$= \left[\frac{2}{9}(10+3(5))^{\frac{1}{2}}\right] - \left[\frac{2}{9}(10+3(2))^{\frac{1}{2}}\right]$

$= \frac{122}{9}$ وحدة طولية

**(11)**

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات

نوجد الاحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

بوضع $f(x) = 0 \quad \therefore x^2 + 5x + 4 = 0$

$\left.\begin{aligned} \therefore x &= -4 \\ x &= -1 \end{aligned}\right\}$ حدود التكامل

$$A = \left| \int_{-4}^{-1} f(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)\,dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_{-4}^{-1} \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{(-1)^3}{3} + \frac{5(-1)^2}{2} + 4(-1) \right] - \left[ \frac{(-4)^3}{3} + \frac{5(-4)^2}{2} + 4(-4) \right] \right|$$

$= \frac{9}{2}$ وحدة مربعة

(12) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات

والمحددة بمنحنى الدالتين $y_1 = \sqrt{1-x^2}, \quad y_2 = 0$

نوجد الاحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

بوضع $y_1 = y_2 \quad \therefore \sqrt{1-x^2} = 0$ بالتربيع

$\therefore \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = (0)^2$

$\therefore 1 - x^2 = 0 \quad \therefore \left.\begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}\right\}$ حدود التكامل

أختار $x = 0 \in [-1, 1]$

$\left.\begin{matrix} (y_1)^2 = \left(\sqrt{1-0^2}\right)^2 = 1 \\ (y_2)^2 = (0)^2 = 0 \end{matrix}\right\} \therefore (y_1)^2 > (y_2)^2$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left((y_1)^2 - (y_2)^2\right) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - (0)^2\right) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \pi \left[1x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left(\left[1(1) - \frac{(1)^3}{3}\right] - \left[1(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right]\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$ وحدة مكعبة

(13)

لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد

فأوجد:

(1) رأسي القطع الزائد

(2) البؤرتين

(3) معادلة كل من الخطين المقاربين

معادلة القطع الزائد: $9y^2 - 25x^2 = 225$ $\boxed{\div 225}$

$\therefore \frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = \frac{225}{225}$

$\therefore \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

$\therefore$ المحور القاطع هو محور $y$

$a^2 = 25 \Longrightarrow a = \sqrt{25} = 5$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = \sqrt{9} =$

$\therefore$ رأسا القطع الزائد هما $A_1(0,-5)$, $A_2(0,5)$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore c^2 = 25 + 9 = 34$

$\therefore c = \sqrt{34} \simeq 5.83$

$\therefore$ البؤرتان هما $F_2(0, 5.83)$ $F_1(0, -5.83)$

$\therefore$ المحور القاطع هو محور $y$

$\therefore$ معادلتي الخطين المقاربين هما $y = \pm \frac{a}{b} x$

$y = \pm \frac{5}{3} x$

مدرسة التميز النموذجية
ابتدائي - متوسط - ثانوي

عندما يكون تعليم أبنائكم
اهتمامكم الأول في الحياة

# قنواتنا على تليجرام

الصف الأول

الصف الثاني

الصف الثالث

الصف الرابع

الصف الخامس

الصف السادس

الصف السابع

الصف الثامن

الصف التاسع

الصف العاشر

صف ١١ علمي

صف ١١ أدبي

صف ١٢ علمي

صف ١٢ أدبي