عمرو فايز

الملف المراجعة النهائية
موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف الحادي عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر العلمي والمادة رياضيات في الفصل الثاني	
1	النموذج الاول 11 علمي(1)
2	هندسة الفضاء بالحلول في مادة الرياضيات
3	مراجعة هامة ومتوقعة في مادة الرياضيات
4	تحميل كتاب الطالب(تمارين)علمي
5	تحميل كتاب الطالب

الأفضل للمراجعة
والتفوق

Fayez

الرياضيات

الإجابة

للصف الحادي عشر

بعد قرار التخفيف

المراجعة النهائية

أقوى مراجعة لضمان الدرجة النهائية

حلول دقيقة
حلول واضحة
ومقترحة لأسئلة
متوقعة

مذكرات شاملة
مذكرات منظمة
تغطي نقاط
الاختبار الأساسية

حصص مراجعة
شرح أهم الأفكار
وحل نماذج امتحانات
سابقة

مراجعة مركزة
تلخيص شامل
لجميع الوحدات
بشكل مبسط

بث مباشر + حصص المراجعة مسجلة + مذكرات محلولة وغير محلولة

للحجز والاستفسار (واتساب):
99421329

أ/عمرو فايز

11

راجع صح ... وادخل الامتحان وانت واثق،
بإذن الله

Q. إذا كان $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = 3 + i$ فأوجد :

(c) $(z_2)^{-1}$ **(b)** $\overline{(z_2 + z_1)}$ **(a)** $z_2 \cdot z_1$

الحل

$$(a) \quad z_2 + z_1 = (3+i)(5-4i)$$
$$= 15 - 12i + 5i + 4$$
$$= 19 - 7i$$

$$(b) \quad \overline{(z_2 + z_1)} = \overline{z_2} + \overline{z_1} = (3 - i) + (5 + 4i) = 8 + 3i$$

$$(c) \quad Z_2^{-1} = \frac{1}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i}$$
$$= \frac{3-i}{9+1} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$$

Q. إذا كان $z_1 = 5 - 2i$, $z_1 = 3 + 4i$ فأوجد :

(b) $\frac{Z_2}{Z_1}$ **(a)** $\overline{3Z_1 - 2Z_2}$

الحل

(a)

$$\overline{3Z_1 - 2Z_2} = 3\overline{Z_1} - 2\overline{Z_2}$$
$$= 3(3 - 4i) - 2(5 + 2i)$$
$$= 9 - 12i - 10 - 4i$$
$$= -1 - 16i$$

(b)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5-2i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$$
$$= \frac{15 - 20i - 6i - 8}{3^2 + 4^2}$$
$$= \frac{7 - 26i}{25}$$
$$= \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$$

Q. اكتب العدد المركب : $\frac{3+i}{2+5i}$ في الصورة الجبرية

الحل

$$= \frac{3+i}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i}$$

$$= \frac{(3+i)\,(2-5i)}{4+25} = \frac{6-15i+2i-5i^2}{29} = \frac{6-15i+2i+5}{29}$$

$$= \frac{11-13i}{29} = \frac{11}{29} - \frac{13i}{29}$$

Q. اكتب العدد : $\frac{2}{3-i}$ في الصورة الجبرية

الحل

$$\frac{2}{3-i} = \frac{2}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}$$

$$= \frac{6+2i}{9+1} = \frac{6}{10} + \frac{2}{10}\,i = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,i$$

Q. ضع العدد المركب : $Z = 1 - \sqrt{3}\, i$ في الصورة المثلثية

الحل

$$\because x = 1 \quad , \quad y = -\sqrt{3}$$

$$\therefore r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

بفرض α زاوية الإسناد :

$$\alpha = tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ θ تقع في الربع الرابع $\because x > 0 \;,\; y < 0$

$$\therefore \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

الصورة المثلثية هي : $= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Q. اكتب العدد : $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة الجبرية ، ثم حوله للصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

الحل

الصورة الجبرية :

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \times \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{3+1}$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الصورة المثلثية

$$x = \frac{1}{2} \,, y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

بفرض α زاوية الإسناد : $\therefore \alpha = tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2}\right|$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

θ تقع في الربع الرابع $x > 0 \;,\; y < 0$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

الصورة المثلثية هي : $Z = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Q. إذا كان : $z_2 = 1 - i \;,\; z_1 = -2 + 2i$

(a) ضع z_1 في الصورة المثلثية

(b) حل المعادلة : $2z + \overline{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

الحل

(b)

$$2z + \bar{z}_1 = 3i(z_2)^2$$
$$2z + (\overline{-2+2i}) = 3i(1-i)^2$$
$$2z + -2 - 2i = 3i(1 - 2i - 1)$$
$$2z + -2 - 2i = 3i(-2i)$$
$$2z + -2 - 2i = -6i^2$$
$$2z + -2 - 2i = 6$$
$$2z = 6 + 2 + 2i = 8 + 2i$$
$$z = 4 + i$$

(a) $z_1 = -2 + 2i$

$x = -2 \quad , \quad y = 2$

$$r = |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

نفرض أن α زاوية الإسناد :

$$\alpha = tan^{-1}\left|\frac{2}{-2}\right| = \frac{\pi}{4}$$

$x < 0 \;,\quad y > 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

الصورة المثلثية هي :

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Q. حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) : $L\left(1, -\sqrt{3}\right), 0 \le \theta < 2\pi$

الحل

$x = 1 \qquad y = -\sqrt{3}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

نفرض أن α زاوية الإسناد :

$$\alpha = tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = \frac{\pi}{3}$$

الربع الرابع : $x > 0 \quad , \quad y < 0$

$$\alpha = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$\therefore$ الإحداثيات القطبية : $\therefore L = \left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$

Q. أوجد الزوج المرتب (r , θ) للنقطة $D\left(3\sqrt{3} , 3\right)$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

الحل

$$x = 3\sqrt{3} \qquad y = 3$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + (3)^2} = 6$$

نفرض أن α زاوية الإسناد :

$$\alpha = tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = tan^{-1}\left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{6}$$

الربع الأول :

$$x > 0 \quad , \quad y > 0$$

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$$

∴ الإحداثيات القطبية :

$$L = \left(6 , \frac{\pi}{6}\right)$$

Q. حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية حيث : $N\left(5 , \frac{\pi}{4}\right)$

الحل

$$r = 5 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$x = r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$y = r\sin\theta = 5\sin\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

∴ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة N :

$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} , \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

Q. أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في C

الحل

$a = 4$ $b = 16$ $c = 25$

نحسب المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$$

$$= -144 = 144\, i^2$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{144\, i^2}}{2 \times 4}$$

$$z_1 = -2 - \frac{3}{2}\, i$$

$$z_2 = -2 + \frac{3}{2}\, i$$

مجموعة الحل = $\left\{-2 - \frac{3}{2}\, i\, , -2 + \frac{3}{2}\, i\right\}$

Q. أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^2 + 6x + 25 = 0$

الحل

$a = 1$ $b = 6$ $c = 25$

نحسب المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 36 - 4(1)(25)$$

$$= -64 = 64\, i^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{64\, i^2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{64\, i^2}}{2} = -3 + 4\, i$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{64\, i^2}}{2} = -3 - 4\, i$$

مجموعة الحل = $\{-3 + 4\, i\, , -3 - 4\, i\}$

Q. أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 3 + 4\,i$

الحل

$$|w|^2 = |Z|$$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \qquad (3)$$

من (1) ، (3) بالطرح $m^2 + n^2 = 5$

$$m^2 - n^2 = 3$$

$$2n^2 = 2 \qquad n^2 = 1 \qquad n = \pm 1$$

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z

فيكون $w^2 = z$

$$(m + ni)^2 = 3 + 4i$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = 3 + 4i$$

$$m^2 - n^2 = 3 \qquad (1)$$

$$2mn = 4 \qquad (2)$$

من (1) ، (3) بالجمع

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m^2 - n^2 = 3 \end{cases}$$

$$2m^2 = 8 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$2\,mn = 4$$

نستنتج أن $m\,,n$ لهما نفس الإشارة

$m = 2 \qquad n = 1$ أو $m = -2 \qquad n = -1$

∴ الجذران التربيعيان هما :

$$w_1 = 2 + i \quad , \quad w_2 = -2 - i$$

Q. أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = -3 - 4\,i$

الحل

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z

فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m + ni)^2 = -3 - 4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين
$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 & (1) \\ 2mn = -4 & (2) \end{cases}$$

$$|w|^2 = |Z|$$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \qquad (3)$$

من (1) ، (3) بالجمع نحصل على :

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

من (1) ، (3) بالطرح نحصل على :

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$-2n^2 = -8 \quad n^2 = 4 \quad n = \pm 2$$

من المعادلة 2 :

$$2\,mn = -4$$

نستنتج أن m , n لهما إشارتان مختلفتان

$n = 2 \quad m = -1$ أو $n = -2 \quad \therefore m = 1$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما :

$$w_1 = 1 - 2i \quad , \quad w_2 = -1 + 2i$$

Q. اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\ \sin(bx)$ في كل من الحالات التالية :

(a) الدورة $\frac{2\pi}{3}$, $a = 1$

الحل

$$\text{دورة الرسم} = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} = b = 3$$

$$\therefore y_1 = 1\ \sin 3x \quad , \quad y_2 = -1 \sin 3x$$

Q. اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\ \cos(bx)$ في كل من الحالات التالية :

(a) الدورة 3π , $a = 5$

الحل

$$\text{دورة الرسم} = \frac{2\pi}{b}$$

$$3\pi = \frac{2\pi}{b} = b = \frac{2}{3}$$

$$\therefore y_1 = 5\ \cos\frac{2}{3}x \quad , \quad y_2 = -5 \cos\frac{2}{3}x$$

Q. اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\ \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية :

(a) الدورة $\frac{\pi}{5}$

الحل

$$\text{دورة الرسم} = \frac{\pi}{b}$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{b} = b = 5$$

$$\therefore y_1 = 1\ \tan 5x \quad , \quad y_2 = -1\ \tan 5x$$

Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \;, -4\pi \le x \le 4\pi$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : $|a| = |2| = 2$

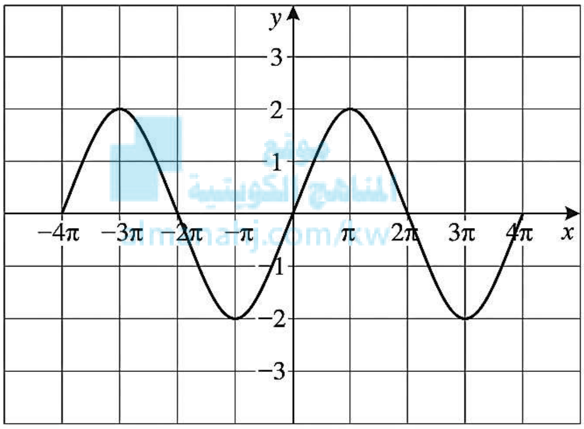
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

ربع الدورة : $4\pi \times \frac{1}{4} = \pi$

x	0	π	2π	3π	4π
$y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	2	0	-2	0

$$y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$a = 2 \quad , \quad b = \frac{1}{2}$$



Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = -3\sin x \;, x \in [-\pi, 2\pi]$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : $|a| = |-3| = 3$

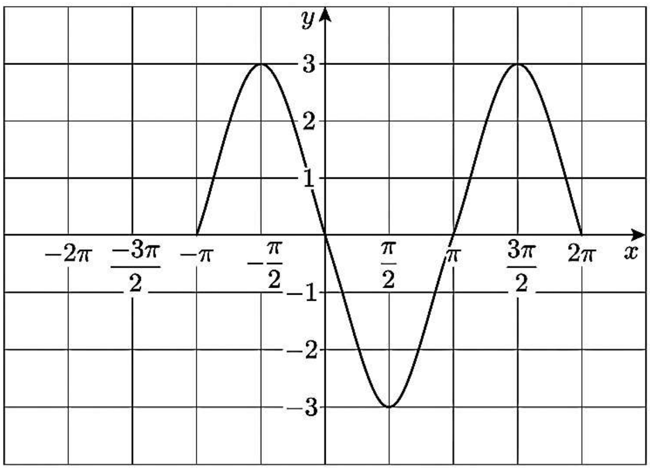
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

ربع الدورة : $2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = -3\sin x$	0	-3	0	3	0

$$y = -3\sin x$$

$$a = -3 \quad , \quad b = 1$$



Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = 3\sin 2x$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : $|a| = |3| = 3$

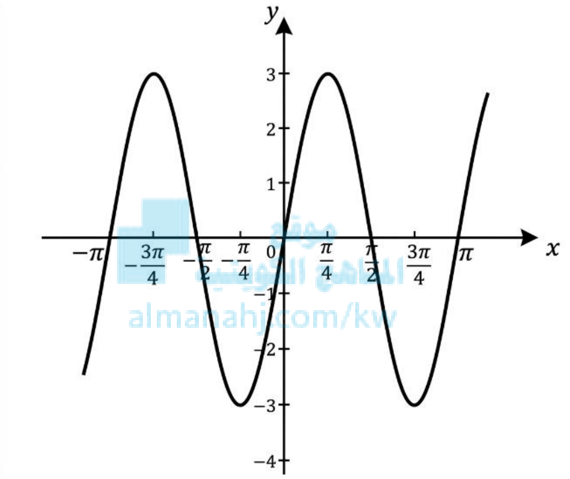
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ربع الدورة : $\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = 3\sin 2x$	0	3	0	-3	0

$y = 3\sin 2x$

$a = 3 \quad , \quad b = 2$



Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = \frac{1}{2}\cos(-x) : x \in [-2\pi, 2\pi]$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : $|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

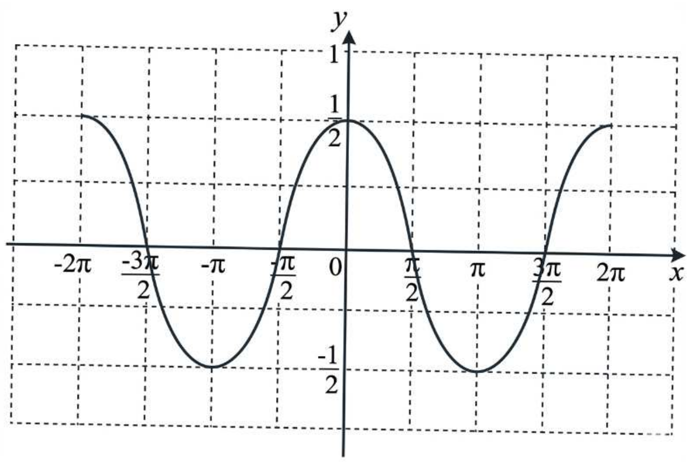
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ربع الدورة : $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \frac{1}{2}\cos(-x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

$a = \frac{1}{2} \quad , \quad b = -1$



Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = \tan 2x \;, x \in \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : لا يوجد

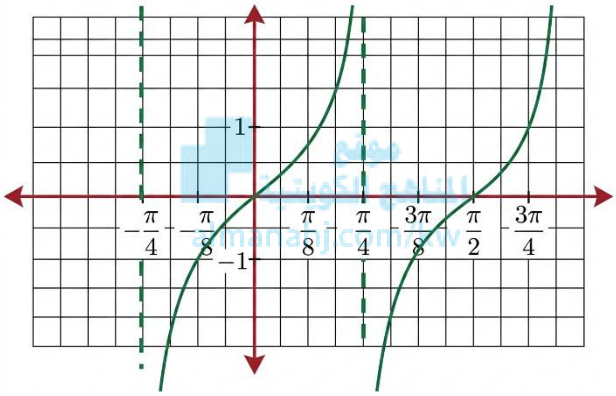
الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

ربع الدورة : $\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$

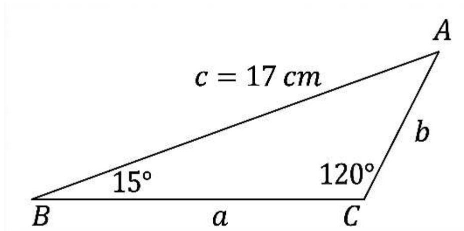
$y = \tan 2x$

$a = 1 \quad , \quad b = 2$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
y	غير معرف	-1	0	1	غير معرف	-1	0	1



Q. حل المثلث ABC



الحل

$\alpha = 180^\circ - (15^\circ + 120^\circ) = 45^\circ$

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 45^\circ}{a} = \frac{\sin 15^\circ}{b} = \frac{\sin 120^\circ}{17}$

$\frac{\sin 45^\circ}{a} = \frac{\sin 120^\circ}{17}$

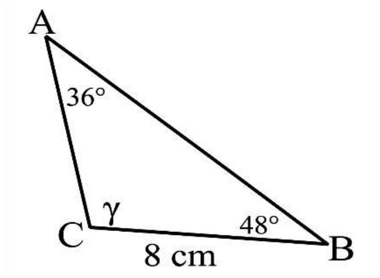
$a = \frac{17 \times \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} \qquad a \approx 13.88 \text{ cm}$

$\frac{\sin 15}{b} = \frac{\sin 120^\circ}{17} \Rightarrow b = \frac{17 \times \sin 15^\circ}{\sin 120^\circ}$

$b \approx 5.08 \text{ cm}$

Q. حل المثلث ABC حيث ، $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 48^\circ$ $a = 8\ cm$

الحل



$$\gamma = 180^\circ - (36^\circ + 48^\circ)$$

$$= 96^\circ$$

$$\frac{\sin\ \alpha}{a} = \frac{\sin\ \beta}{b} = \frac{\sin\ \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin\ 36^\circ}{8} = \frac{\sin\ 48^\circ}{b} = \frac{\sin\ 96^\circ}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b}$$

$$b = \frac{8\sin\ 48^\circ}{\sin\ 36^\circ} \qquad b \approx 10.11\ cm$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$$

$$c = \frac{8\sin 96^\circ}{\sin 36^\circ}$$

$$c \approx 13.54\ cm$$

Q. حل $\Delta\ ABC$ حيث $a = 7\ cm$, $b = 6\ cm$ $\alpha = 26.3^\circ$

الحل

$$\frac{\sin\ \alpha}{a} = \frac{\sin\ \beta}{b} = \frac{\sin\ \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin \beta}{6}$$

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{6 \times \sin 26.3}{7}\right) = 22.3$$

الربع الأول

$$\beta_1 = 22.3$$

$$\gamma_1 = 180 - [\alpha + \beta_1]$$

$$180 - [26.3 + 22.3] = 131.4$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin 131.4}{c}$$

$$c = \frac{7 \times \sin\ 131.9}{\sin\ 26.3} = 11.85$$

الربع الثاني

$$\beta_2 = 180 - \beta = 180 - 22.3 = 157.7$$

$$\gamma_2 = 180 - [\alpha + \beta_2]$$

$$= 180 - [26.3 + 157.7]$$

$$\gamma_2 = -4$$ مرفوض

Q. حل ΔABC حيث $\propto = 95^\circ$, $b = 21$ $a = 12$

الحل

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\,(\hat{c})$$
$$C = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\,(\hat{c})}$$
$$= \sqrt{12^2 + 21^2 - 2 \times 12 \times 21 \times cos\,(95^\circ)} = 25.08\ cm$$

$$\cos\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(21)^2 + (25.08)^2 - (12)^2}{2 \times 21 \times 25.08} = 0.879$$
$$\propto = \cos^{-1}(0.879) = 28.47$$
$$\beta = 180 - \alpha - \propto = 180 - 95 - 28.47$$
$$\beta = 56.53$$

Q. حل المثلث ABC حيث $c = 5\ cm$, $b = 4\ cm$, $a = 2\ cm$

الحل

$$cos\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(4)^2 + (5)^2 - (2)^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{37}{40}$$
$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{37}{40}\right) = 22.3$$
$$cos\ \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(2)^2 + (5)^2 - (4)^2}{2 \times 2 \times 5} = \frac{13}{20}$$
$$\beta = cos^{-1}\left(\frac{13}{20}\right) = 49.5$$
$$\gamma = 180^\circ - (22.3^\circ + 49.5^\circ) \approx 108.2^\circ$$

Q. ABC مثلث فيه $c = 7\ cm$, $b = 8\ cm$, $a = 3\ cm$ أوجد :

- قياس أكبر زاوية

- مساحة سطح المثلث ABC مستخدما قاعدة هيرون

الحل

(1) قياس أكبر زاوية هو β لأنها تقابل أطول ضلع

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2(3)(7)} = \frac{-1}{7}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{7}\right) = 98.21$$

(2)
$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 8 + 7) = 9$$

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-3)(9-8)(9-7)}$$

$$= 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

أثبت صحة المتطابقات التالية

Q. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

الحل

$$\cos^4 x - \sin^4 x =$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$= \cos 2x =$ الأيمن

Q. $\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \tan^2 x$

الحل

الطرف الأيسر $= \tan^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$

$$= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$$

= الطرف الأيمن

Q. $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

الحل

الأيسر

$$(1 - \tan x)^2 = 1 + \tan^2 x - 2\tan x$$

$$= \sec^2 x - 2\tan x$$

Q. $\tan x + \cot x = \sec x . \csc x$

الحل

الطرف الأيسر

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x \sin x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \sec x \cdot \csc x$$

الطرف الأيمن

$$\text{Q. } \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$$

الحل

الأيسر

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 1 + 2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{1+1+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta} = \frac{2\,\cancel{[1+\cos\theta]}}{\cancel{[1+\cos\theta]}\sin\theta}$$

$$= \frac{2}{\sin\theta} = 2\csc\theta$$ الأيمن

$$\text{Q. } \frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1-\cos x} = 2\csc^2 x$$

الحل

الطرف الأيسر

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} + \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{1+\cos x + 1 - \cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{2}{1-\cos^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$= 2\csc^2 x$$

= الطرف الأيمن

$$\text{Q. } \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$$

الحل

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x} = \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$= (\csc x - \cot x)^2$$

$$\text{Q. } \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$$

الحل

الطرف الأيسر

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$$

Q. $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

الحل

الأيسر

$$\cos x\,[\tan x + \sin x \,.\, \cot x]$$

$$\cos x \left[\frac{\sin x}{\cos x} + \cancel{\sin x} \,.\, \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}\right]$$

$$\cos x \,.\, \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x \,.\, \cos x$$

$$\sin x + \cos^2 x$$ الأيمن

Q. $\tan x + \cot x + 2 = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

الحل

الأيسر

$$\tan x + \cot x + 2 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2$$

نوحد المقامات

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\cos x \,.\, \sin x}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x} =$$ الأيمن

Q. $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

الحل

الطرف الأيسر

$$\sin x\,[\cot x + \cos x \,.\, \tan x]$$

$$\sin x \left[\frac{\cos x}{\sin x} + \cancel{\cos x} \,.\, \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\right]$$

$$\cancel{\sin x} \,.\, \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} + \sin x \,.\, \sin x$$

$$\cos x + \sin^2 x$$

Q. أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

الحل

نبسط الطرف الأيسر

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{\cos x \cdot (1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x[1+\sin x]}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos x} = \text{الطرف الأيمن}$$

Q. أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \tan x . \sec x$

الحل

الطرف الأيسر

$$= \frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \frac{\tan^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} = \tan x \cdot \sec x = \text{الطرف الأيمن}$$

Q. حل المعادلة : $sin\ x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

الحل

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن $\propto$ هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\alpha = sin^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع $\quad \sin\ x < 0$

عندما x تقع في الربع الثالث :

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$
$$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

عندما x تقع في الربع الرابع :

$$x = \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$
$$= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة : $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $3\ sin\ \theta + 1 = sin\ \theta$

الحل

$$3\sin\theta - \sin\theta = -1$$

$$2\sin\ \theta = -1 \ \Rightarrow\ \sin\ \theta = -\frac{1}{2}$$

نفرض أن $\propto$ هي زاوية الإسناد لـ θ

$$\alpha = sin^{-1}\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع $\quad \sin\ x < 0$

θ تقع في الربع الثالث :

$$\theta = \frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$= \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

θ تقع في الربع الرابع :

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة : $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ ,\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل

$$5\sin\theta - \sin\theta = 3 \qquad 4\sin\theta = 3 \qquad \sin\theta = \frac{3}{4}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{3}{4}\right| = 0.848$$

$\therefore$ θ تقع في الربع الأول و الربع الثاني $\quad \sin\theta > 0$

الربع الأول :

$$\theta = \alpha = 0.848$$

الربع الثاني :

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - 0.848 = 2.29$$

$\therefore$ حل المعادلة : $\theta = 0.848$, $\theta = 2.29$

Q. حل المعادلة : $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

الحل

$$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

$(2\sin x + 1) = 0$ أو $(\sin x - 2) = 0$

$\sin x = \frac{-1}{2}$ أو $\sin x = 2$

عندما $2 \notin [-1, 1]$ $\quad \sin x = 2$

$\therefore$ $\sin x = 2$ ليس لها حل

نأخذ $\sin x = \frac{-1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\alpha = \sin^{-1}\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع $\quad \because \sin x < 0$

عندما x تقع في الربع الرابع :

$$x = (2\pi - \alpha) + 2k\pi$$

$$x = \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

$$x = \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

عندما x تقع في الربع الثالث :

$$x = (\pi + \alpha) + 2k\pi$$

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

$$x = \left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$, $x = \left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $2\cos x = -\sqrt{3}$

الحل

$$2\cos x = -\sqrt{3} \qquad \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد لـ x

$$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني و الربع الثالث $\qquad \cos x < 0$

الربع الأول :

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

الربع الثالث :

$$x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

حل المعادلة : $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$ حيث $0 \le x < 2\pi$

الحل

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\cos\alpha = |\cos x| \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث $\qquad \because \cos x < 0$

عندما x تقع في الربع الثاني :

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in [0\,,2\pi)$$

عندما x تقع في الربع الثالث :

$$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in [0\,,2\pi)$$

و منه يكون حل المعادلة هو : $x = \frac{4\pi}{3}$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$

Q. حل المعادلة : $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

الحل

$$(\cos x + 2)(\cos x + 1) = 0$$

أما

$\cos x + 2 = 0$

$\cos x = -2 \notin [-1, 1]$

∴ حل المعادلة :

$x = \pi + 2k\pi$

$\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2k\pi \; , k \in Z$

Q. حل المعادلة : $2\cos\theta \sin\theta = -\sin\theta$

الحل

$2\cos\theta \sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

$\sin\theta = 0$ أو $\cos x = \frac{-1}{2}$

نفترض أن $\propto$ هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{\pi}{3}$$

∴ θ زاوية ربعية

$\therefore \; \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore \; \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \; , k \in Z$

∴ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث

$\cos x < 0$

عندما θ تقع في الربع الثاني :

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \; , \; k \in Z$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

عندما θ تقع في الربع الثالث :

$\theta = (\pi + \alpha) + 2k\pi \; , \; k \in Z$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

∴ حل المعادلة :

$\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $2\cos x \ \sin x - \cos x = 0 \ , \ x \in [0, 2\pi]$

الحل

$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$\therefore \cos x = 0$ or $2\sin x - 1 = 0$

$\therefore x = \dfrac{\pi}{2} \quad , \quad x = \dfrac{3\pi}{2}$ $\qquad \sin x = \dfrac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد حيث

$$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \ \sin x > 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الثاني

في الربع الأول :

$$x = \alpha = \frac{\pi}{6}$$

في الربع الثاني :

$$x = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$\therefore$ حل المعادلة هو : $x = \dfrac{5\pi}{6} \quad , \quad x = \dfrac{\pi}{6} \quad , \quad x = \dfrac{3\pi}{2} \quad , \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

Q. إذا كان : $\sin\alpha = \dfrac{4}{5} \ , \ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \cos\beta = \dfrac{-12}{13} \ , \ \pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$

أوجد كلا مما يلي : $2)\ \tan 2\beta$ $\qquad 1)\ \sin(\alpha + \beta)$

الحل

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2$$

$$\sin\beta = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \pm\frac{5}{13}$$

$$\because \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \qquad \therefore \sin\beta = \frac{-5}{13}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-5}{13} \div \frac{-12}{13} = \frac{5}{12}$$

$$(2)\quad \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\frac{3}{5}$$

$$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \ \rightarrow \qquad \therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$(1)\quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) = \frac{-63}{65}$$

Q. إذا كان : $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فأوجد :

2) $\tan 2\theta$

1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

الحل

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ الربع الثاني

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{5} \div -\frac{3}{5} = = -\frac{4}{3}$$

1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta$$

$$= \frac{4}{5}\cdot(0) - 1 \times \frac{-3}{5} = \frac{3}{5}$$

(2) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}$

$$= \frac{2\times -\frac{4}{3}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

Q. إذا كان : $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

فأوجد : 2) $\sin 2\theta$ 1) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

الحل

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\because \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta < 0$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

(1) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

Q. إذا كان : $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-3}{5}$ فأوجد :

1) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 2) $\tan 2\theta$ 3) $\sin 2\beta$

الحل

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \qquad \therefore \cos\theta < 0$$

$$\cos\theta = \frac{-4}{5}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\left(\frac{-3}{5}\right)}{\left(\frac{-4}{5}\right)} = \frac{3}{4}$$

1) $$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

(2) $$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

(3) $$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$= 2x - \frac{3}{5}x - \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

Q. إذا كان : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$

فأوجد : $\sin 2\theta$

الحل

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$$

$$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \therefore \sin\theta > 0$$

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

Q. إذا كان : $\tan\theta = -1 + \sqrt{2}$ ، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

الحل

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(-1+\sqrt{2})^2}$$

$$= 1$$

Q. أوجد قيمة $\sin 2x$: إذا كان $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

الحل

بتربيع الطرفين

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = \frac{1}{25}$$

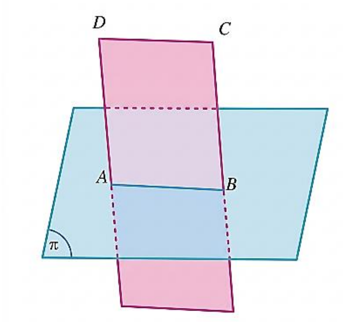
$$1 - 2\sin x\cos x = \frac{1}{25}$$

$$-2\sin x\cos x = \frac{1}{25} - 1 = -\frac{24}{25}$$

$$2\sin x\cos x = \frac{24}{25} \qquad \therefore \sin 2x = \frac{24}{25}$$

Q. في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi , \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} , AD = BC$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{CD} // \pi$



الحل

$\because \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{BC}$ يعينان مستويا وحيدا و ليكن $(ABCD)$ فيه

$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} , AD = BC$

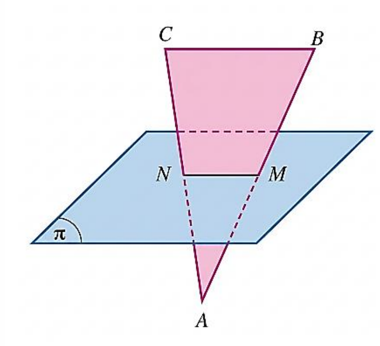
$\therefore$ $(ABCD)$ متوازي أضلاع

و منه $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} // \pi$

Q. في الشكل المقابل : المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ، M , N تنتميان إلى المستوى π . أثبت أن : $\overleftrightarrow{BC} // \pi$



الحل

في Δ ABC :

$$\begin{cases} M \text{ منتصف } \overline{AB} \\ N \text{ منتصف } \overline{AC} \end{cases} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{MN} \quad (1)$$

و لكن :

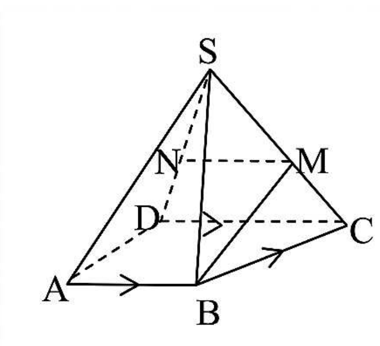
$$\left.\begin{matrix} N \in \pi \\ M \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \subset \pi \qquad (2)$$

من 1 , 2 :

$\therefore \overleftrightarrow{BC} // \pi$

Q. في الشكل المقابل : $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$, $M \in \overline{SC}$ ، المستوى ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N



أثبت أن : (1) $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوى SDC

(2) $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{CD}$

الحل

$$\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{DC}\\ \overleftrightarrow{DC}\subset(SDC)\end{array}\right\}\overleftrightarrow{AB}//(SDC) \qquad (1)$$

$$(ABMN)\cap(SDC)=\overleftrightarrow{MN}$$

$$\overleftrightarrow{AB}\subset(ABMN) \quad , \quad \overleftrightarrow{DC}\subset(SDC)$$

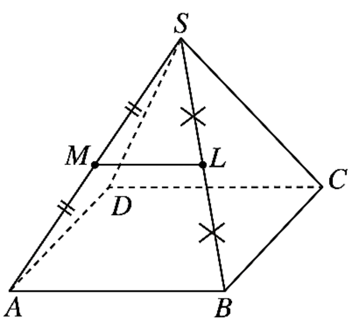
$$\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{DC}$$

$$\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{DC}//\overleftrightarrow{MN}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{MN}//\overleftrightarrow{CD}$$

Q. $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$ ،

أثبت أن : $\overleftrightarrow{ML} // (ABCD)$



الحل

في المثلث SAB :

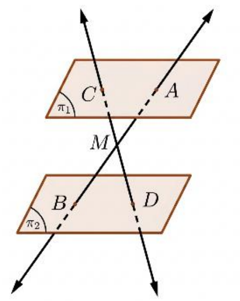
$$\overleftrightarrow{ML} // \overleftrightarrow{AB} \quad \Leftarrow \quad \left\{\begin{array}{l} M \text{ منتصف } \overline{SA} \\ N \text{ منتصف } \overline{SB}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{ML} // \overleftrightarrow{AB}\\ \overleftrightarrow{AB} \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{ML} // (ABCD)$$

نظرية 1

Q. في الشكل المقابل : π_2 , π_1 مستويان متوازيان ، M نقطة واقعة بينهما ، حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن : $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



الحل

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$$

يكونان مستوى ليكن

$$\pi_1 // \pi_2$$

$$\left.\begin{matrix} \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{CA} \\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CA} // \overleftrightarrow{BD}$$

$\therefore \ \Delta\Delta\, AMC , BMD$ متشابهان

$$\therefore \ \frac{AM}{MB} = \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD}$$

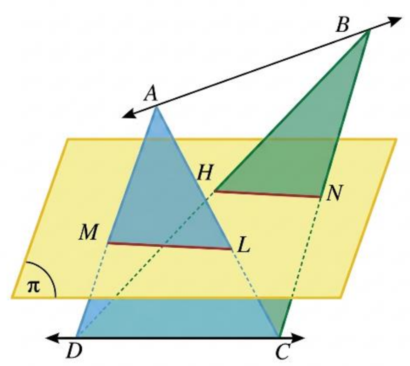
و منه $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

Q. في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان ، $\overleftrightarrow{CD} // \pi$

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M ، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H ، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N

أثبت أن : $\overleftrightarrow{LM} // \overleftrightarrow{NH}$



الحل

$$\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{A\}$$

مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا وحيدا و هو (ADC)

$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$

$$\left.\begin{matrix} (ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{LM} \\ \overleftrightarrow{CD} // \pi \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (ACD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{LM} // \overleftrightarrow{CD} \qquad (1)$$

$$\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{B\}$$

مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا وحيدا و هو (BCD)

$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$

$$\left.\begin{matrix} (BCD) \cap \pi = \overleftrightarrow{NH} \\ \overleftrightarrow{CD} // \pi \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (BCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{NH} // \overleftrightarrow{CD} \qquad (2)$$

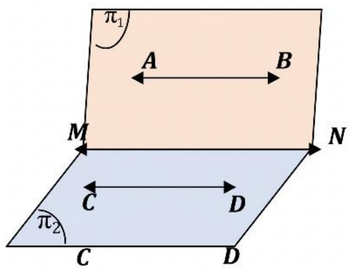
من 1 , 2 نجد

$$\overleftrightarrow{LM} // \overleftrightarrow{NH}$$

Q. ليكن π_1 , π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث : $\overleftrightarrow{AB} // \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$

$\overleftrightarrow{CD} // \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_1$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$



الحل

$$\left.\begin{array}{r}\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN} \\ \overleftrightarrow{AB} // \pi_2 \\ \overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{MN} \qquad (1)$$

نظرية 2

$$\left.\begin{array}{r}\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN} \\ \overleftrightarrow{CD} // \pi_1 \\ \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{MN} \qquad (2)$$

نظرية 2

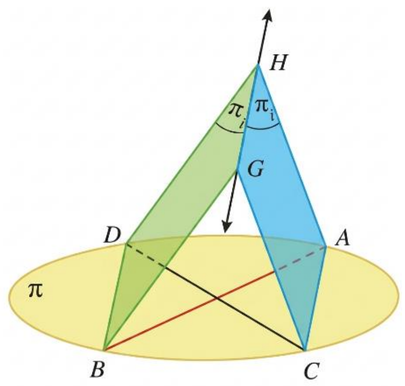
من 1 , 2 نجد

$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

Q. في الشكل المقابل : $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ قطران في مستوى الدائرة π

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن : مستوى الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$



الحل

AB , CD قطران في الدائرة ، فهما متطابقان و ينصف كل منهما الآخر

فالشكل ABCD مستطيل

$$\overline{AC} // \overline{DB} \qquad (1)$$

$$\overline{AC} \subset \pi_1 \ , \qquad \overline{DB} \subset \pi_2 \quad , \qquad \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH} \qquad (2)$$

من 1 , 2 نجد

$$\overleftrightarrow{GH} // \overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{DB}$$

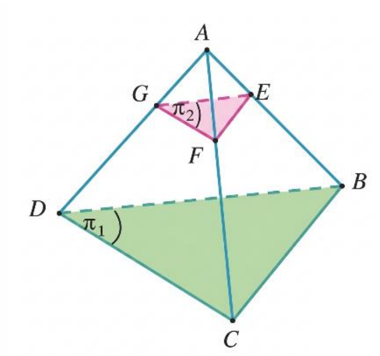
$$\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{GH} // \overleftrightarrow{AC} \\ \overleftrightarrow{AC} \subset \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{GH} // \pi$$

أي أن مستوى الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

Q. في الشكل المقابل : $ABCD$ هرم ثلاثي . المستويان π_1 , π_2 متوازيان .

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$, $FG = 6\ cm$

فأوجد : DC



الحل

$$\left.\begin{array}{l}(ABC) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{BC} \\ (ABC) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{EF} \\ \pi_1 // \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{BC}$$

نظرية 4

المثلث ABC فيه $\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{BC}$

فالمثلثان AEF , ABC متشابهان

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(ACD) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{DC} \\ (ACD) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GF} \\ \pi_1 // \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{GF} // \overleftrightarrow{DC}$$

المثلثان AFG, ACD متشابهان

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{FG}{CD} \qquad (2)$$

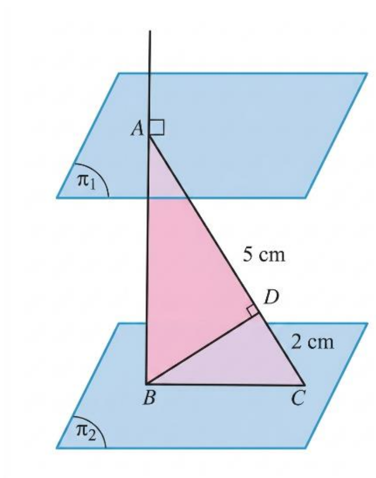
من 1 , 2 نجد

$$\frac{FG}{CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{CD} = \frac{1}{4}$$
$$CD = 24\ \text{cm}$$

Q. في الشكل المقابل : $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ قطران في مستوى الدائرة π

ارسم : $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ABC

إذا كان : $\overleftrightarrow{DC} = 2cm$, $AD = 5cm$ ، أوجد : BD



الحل

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 // \pi_2 \\ AB \perp \pi_1\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$$

نظرية 7

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC} \subset \pi_2 \\ \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC}$$

في المثلث ABC القائم في B

$$\overline{BD} \perp \overline{AC}$$

$$(BD)^2 = AD \times DC = 5 \times 2 = 10$$
$$BD = \sqrt{10}\ \text{cm}$$

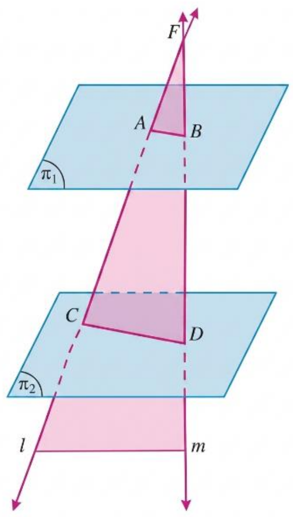
Q. في الشكل المقابل : π_1 , π_2 مستويين متوازيين .

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان F و يقطعان كلا من

π_1 في A , B ، π_2 في C , D

إذا كان $FB = 5cm , CD = 9cm , AC = 6cm , BD = 4cm$

فأوجد محيط المثلث FAB



الحل

$\because$ $\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان F

يعينان مستو واحد π

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 // \pi_2 \\ \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB} \\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD} \end{array}\right\} \Longrightarrow \therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

نظرية

في المستوى π , $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

المثلثان FAB, FCD متشابهان

$$\frac{FB}{FD} = \frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\frac{5}{5+4} = \frac{FA}{FA+6} = \frac{AB}{9}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{FA}{FA+6}$$

$$9FA = 5(FA+6)$$

$$4FA = 30 \Rightarrow FA = 7.5 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{AB}{9}$$

$$9AB = 45 \Rightarrow AB = 5 \text{ cm}$$

محيط المثلث FAB يساوي :

$$FA + FB + AB = 7.5 + 5 + 5 = 17.5 \text{ cm}$$

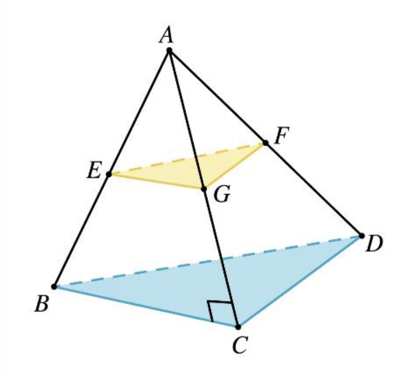
Q. في الشكل المقابل : A نقطة خارج المستوى BCD .

و النقاط E , G , F منتصفات $\overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD}$ على الترتيب

إذا كان : $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

و كان : $AD = 13cm \quad AC = 12cm \quad CD = 5cm$

فأثبت أن : $(EGF) // (BCD)$



الحل

في $\Delta \, ACD$:

$$(AD)^2 = (13)^2 = 169$$

$$(AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$$

فالمثلث ACD قائم في C

$$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

معطى $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$

متقاطعان $\overleftrightarrow{CB} \quad , \quad \overleftrightarrow{CD}$

إذاً $\overleftrightarrow{AC} \perp (BCD) \quad (1)$

نظرية 5

في $\Delta \, ABC$:

E منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$ $\Leftarrow \overline{EG} // \overleftrightarrow{BC}$

و لكن $m(B\hat{C}A) = 90^\circ$ بالتالي $m(A\hat{G}E) = 90^\circ$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$$

بالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

بالتالي $\overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)$

أي أن $\overleftrightarrow{AC} \perp (EGF) \quad (2)$

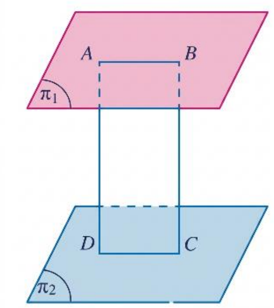
من $1 , 2$ نجد

$$(EGF)//(BCD)$$

.Q في الشكل المقابل : $\pi_1 // \pi_2$ ، A , B نقطتان في π_1

C , D نقطتان في π_2 حيث : A , B , C , D في مستوى واحد

$\overline{BC} \perp \pi_1$, $\overline{AD} \perp \pi_2$ ، أثبت أن : $ABCD$ مستطيل



الحل

(1) $\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2 \\ \overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$

النقاط A , B , C , D في مستوى واحد هو $(ABCD)$

(2) $\left.\begin{array}{l}\pi_1 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{AB} \\ \pi_2 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{DC} \\ \pi_1 // \pi_2\end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DC}$

من $1 , 2$ نجد الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع

لكن

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AD} \perp \pi_2 \\ \overline{DC} \subset \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AD} \perp \overline{DC}$$

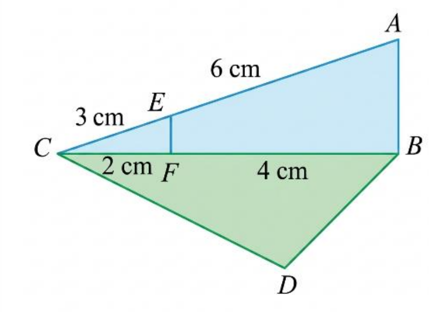
إذا الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

الشكل $ABCD$ مستطيل

.Q في الشكل المقابل : إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

و كان : $CE = 3cm , EA = 6cm , CF = 2cm , FB = 4cm$

أثبت أن : $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



الحل

البرهان : $\overleftrightarrow{AC} , \overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان فهما يعنيان مستويا وحيدا (ABC)

في المثلث CAB :

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \overline{EF} // \overline{AB}$ نظرية طاليس

$\because \overline{AB} \perp (CBD)$

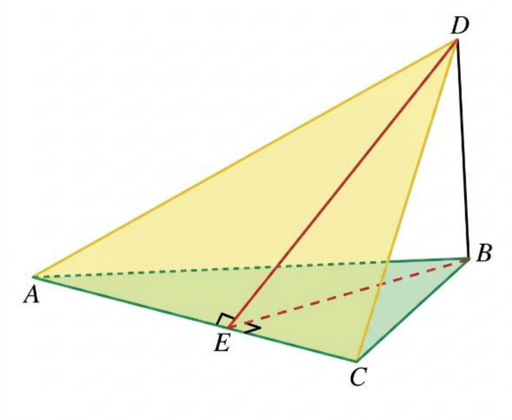
$\therefore \overline{EF} \perp (CBD)$ (1) نظرية

$\overline{DB} \subset (CBD)$ (2)

من $1 , 2$ نستنتج أن :

$$\overline{EF} \perp \overline{DB}$$

Q. في الشكل المقابل : D نقطة خارج مستوى المثلث ABC



$DB = 5cm$, $AB = 10cm$, $m(BAC) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$, $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد :

- BE , DE
- قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

الحل

$BE \perp AC \Rightarrow m(B\hat{E}A) = \frac{\pi}{2}$

في المثلث ABE القائم في E

$$\sin A = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{BE}{10}$$

$$\text{BE} = 10\sin\frac{\pi}{6} = 5\text{ cm}$$

$$\left.\begin{matrix}\overline{DB} \perp (ABC)\\ \overline{BE} \perp (ABC)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{EB}$$

فالمثلث DBE قائم في B و متطابق الضلعين

$(BD = BE = 5cm)$

حسب فيثاغورث $DE = \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$

تكملة :

(2) $\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC , DAC

في المستوى BAC : $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

في المستوى DAC : $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AC}$ حافة الزاوية الزوجية بين المستويين

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين

$$\tan(BED) = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{BD}{BE} = \frac{5}{5}$$

$$\therefore m(BED) = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين

$$BAC = DAC = \frac{\pi}{4}$$

Q. في الشكل المقابل : D نقطة خارج مستوى المثلث ABC

$m(B\hat{A}C) = 45°$, $AB = 10cm$, $DB = 5cm$

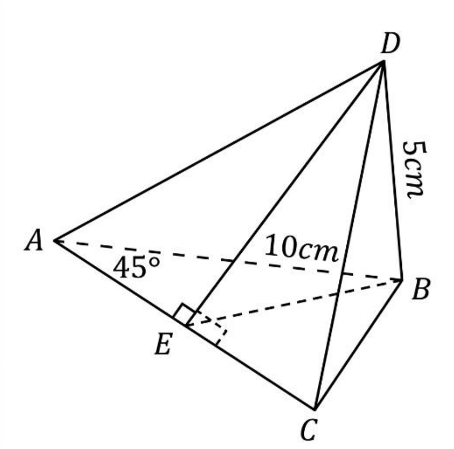
$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

أوجد :

- BE , DE

- قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC



الحل

(a) في المثلث BEA القائم في $\hat{E}$

$$\sin A = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \sin 45° = \frac{BE}{10}$$

$$BE = 10\sin 45° = 5\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{DB} \perp (ABC)\\ \overline{BE} \perp (ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{BE}$$

فالمثلث DBE قائم في B حسب فيثاغورث

$$DE = \sqrt{(5)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{3}$$

(b) $\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC , DAC

(الحافة الزوجية)

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$: $BE \subset (BAC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$: $DE \subset (DAC)$

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين

BAC , DAC هي $B\hat{E}D$

في المثلث DBE القائم في B

$$\tan(B\hat{E}D) = \frac{DB}{BE} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore m(BED) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 35.26°$$

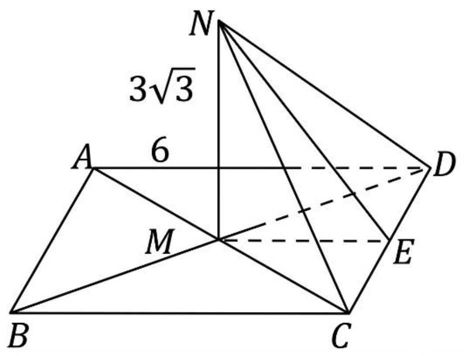
∴ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC يساوي $35.26°$ تقريبا

Q. $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه $AD = 6cm$

أقيم $\overline{NM}$ عمودا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه

بحيث $MN = 3\sqrt{3}\ cm$ ، E منتصف $\overline{CD}$

أوجد : قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$



الحل

$\overleftrightarrow{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين NCD , $ABCD$

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{MN} \perp (ABCD) \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{CD} \qquad (1)$$

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$

$$\overleftrightarrow{ME} \perp \overleftrightarrow{CD} \qquad (2)$$

من 1 , 2 نجد

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (MNE) \qquad , \qquad \overline{NE} \subset (MNE)$$

$$\overleftrightarrow{NE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

$$NE \subset (NCD)$$

$M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث ACD لدينا $\overleftrightarrow{EM}$ واصلة بين منتصفي الضلعين $\overline{CA}$, $\overline{CD}$

$$EM = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times 6 = 3cm$$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M :

$$\tan M\hat{E}N = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$m(M\hat{E}N) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$ هو $60°$

➢ ظلل الدائرة ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة :

❖ الصورة الجبرية للعدد : $\sqrt{-4}+3$ هي $3+2i$

a b

❖ الجذران التربيعيان للعدد -1 هما : $-1\,,1$

a b

❖ الصورة المبسطة للتعبير $(12+5i)-(2-i)$ هي $(10-6i)$

a b

❖ الإحداثيات القطبية للنقطة $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي : $M\left(1\,,\,\frac{5\pi}{4}\right)$

a b

❖ الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $B\left(\sqrt{2}\,,135°\right)$ هي : $B(-1\,,1)$

a b

❖ الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $A\left(4\,,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي : $A(2\,,-2\sqrt{3})$

a b

❖ مرافق العدد المركب : $z=3+4i$ هو : $\bar{z}=3-4i$

a b

❖ إذا كان $z_1\,,z_2$ جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1+z_2=0$

a b

❖ معادلة الدالة المثلثية $y=a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 و الدورة 3π

يمكن أن تكون $y=5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$

a b

❖ سعة الدالة $y = 3\,tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ هي 3

a　b

❖ الدالة : $y = a\,tan\,bx$ دالة دورية دورتها $\frac{\pi}{|2b|}$

a　b

❖ $cos\,x = 2\,cos^2\frac{x}{2} - 1$

a　b

❖ $\frac{1 - cos\,2x}{2} = 2\,cos^2\frac{x}{2}$

a　b

❖ $sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - cos\,x}{2}$

a　b

❖ حل المعادلة : $\bar{z} + 2 = 5 - i$ هو : $z = 3 + i$

a　b

❖ $cos\,6x = 2\,cos^2 3x - 1$

a　b

❖ إذا كان a , b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\ \sin\theta$

a b

❖ لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة

a b

❖ في المثلث ABC : $AC = 9\text{cm} , AB = 7\text{cm} , BC = 8\text{cm}$
فإن مساحة المثلث ABC تساوي $12\sqrt{5}\ cm^2$

a b

❖ مجموعة حل المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي : $\{2 - i , 2 + i\}$

a b

❖ إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\ cm , 8\ cm , 12\ cm$ فإن قياس الزاوية الأكبر في هذا المثلث يساوي حوالي $133.4°$

a b

❖ إذا كان $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $cos\,\theta = \frac{3}{5}$ فإن $sin\,2\theta = \frac{4}{5}$

a b

❖ حل المعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ هو : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

a b

❖ $\cos 94° \cos 18° - \sin 94° \sin 18°$ يساوي $\cos 112°$

a b

❖ $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$

a b

❖ $\cos \frac{\pi}{12}$ يساوي $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

a b

❖ $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

a b

❖ إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين.

a b

❖ إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن : $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

a b

❖ يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

a b

❖ إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الآخر

a b

❖ إذا كان المستقيمان l, m متخالفان و كان $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$

a b

❖ إذا كان : $\overleftrightarrow{m} // \pi$, $\overleftrightarrow{l} // \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

a b

❖ إذا مستقيم l مستوى π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازى مستقيما وحيدا في π

a b

❖ إذا كان : $\overleftrightarrow{m} // \pi$, $\overleftrightarrow{l} // \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$

a b

❖ إذا كان : $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$

a b

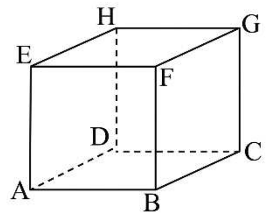
❖ المستقيمان العموديان على مستو متوازيان

a b

❖ إذا كان المستقيم l مائل على المستوى π فإن $\overleftrightarrow{l}$ ليس عموديا على اى مستقيم محتوى في π

a b

❖ في الشكل المقابل : إذا كان $ABCDEFGH$ مكعب فإن $\overleftrightarrow{HG}, \overleftrightarrow{AB}$ يعينان مستويا



a b

➢ لكل بند أربع اختيارات واحد فقط صحيح ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة :

❖ مجموعة حل : $z \in C : \; z^2 - 4z + 20 = 0$ هي :

$(a)\{2-4i, -2-4i\}$ $(b)\ \{-2+4i, -2-4i\}$

$(c)\ \{2-4i, -2+4i\}$ $(d)\ \{2-4i, 2+4i\}$

❖ الصورة المثلثية للعدد المركب : $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leq \theta < \pi$ هي z

$(a)\ 4\left(cos\,\frac{5\pi}{4} + i\,sin\,\frac{5\pi}{4}\right)$ $(b)\ 2\sqrt{2}\left(cos\,\frac{5\pi}{4} + i\,sin\,\frac{5\pi}{4}\right)$

$(c)\ 2\sqrt{2}\left(cos\,\frac{3\pi}{4} + i\,sin\,\frac{3\pi}{4}\right)$ $(d)\ 2\sqrt{2}\left(cos\,\frac{7\pi}{4} + i\,sin\,\frac{7\pi}{4}\right)$

❖ الصورة المثلثية للعدد المركب : $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi]$

$(a)\ z = 4\left(cos\,\frac{2\pi}{3} + i\,sin\,\frac{2\pi}{3}\right)$ $(b)\ z = 4\left(cos\,\frac{\pi}{3} + i\,sin\,\frac{\pi}{3}\right)$

$(c)\ z = 4\left(cos\,\frac{\pi}{6} + i\,sin\,\frac{\pi}{6}\right)$ $(d)\ z = 4\left(cos\,\frac{5\pi}{3} + i\,sin\,\frac{5\pi}{3}\right)$

❖ إذا كان $z = i$ فإن z^{250} تساوي :

$(a)\ -i$ $(b)\ i$
$(c)\ 1$ $(d)\ -1$

❖ $8-(\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$ يساوي :

$(a)\ 11-3i$ $(b)\ 11+3i$
$(c)\ 11-5i$ $(d)\ 11+5i$

❖ $\forall\, n \in z^{+}$ قيمة فإن $(i^{2n+2}+i^{2n+8})$ تساوي :

$(a)\ i^{-2n}$ $(b)\ -1$
$(c)\ 0$ $(d)\ 1$

❖ قيمة i^{40} تساوي :

$(a)\ -1$ $(b)\ -i$
$(c)\ 1$ $(d)\ 1$

❖ الإحداثيات القطبية للنقطة $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي :

$(a)\ B\left(1, \frac{-\pi}{4}\right)$ $(b)\ B\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$
$(c)\ B\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ $(d)\ B\left(1, \frac{-3\pi}{4}\right)$

❖ أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي :

$(a)\ 18+17i$ $(b)\ 18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$
$(c)\ 6+17i$ $(d)\ 18$

❖ إذا كان : $xi^2 + 3yi = 5 + 3i^5$: فإن (x, y) تساوي :

(a) $(5, 1)$
(b) $(-5, -1)$
(c) $(5, -1)$
(d) $(-5, 1)$

❖ الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $A\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ هي :

(a) $A(2, 2\sqrt{3})$
(b) $A(-2, 2\sqrt{3})$
(c) $A(-2, -2\sqrt{3})$
(d) $A(2, -2\sqrt{3})$

❖ الصورة الجبرية للعدد المركب $z = (1 + 2i)^2$ هي :

(a) $z = -3 + 4i$
(b) $z = 5 + 4i$
(c) $z = 5$
(d) $z = -3$

❖ الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 33 - 56i$ هما :

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$
(b) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$
(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$
(d) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

❖ معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 و الدورة 6 يمكن ان تكون :

(a) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$
(b) $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$
(c) $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$
(d) $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

❖ في الدالة المثلثية $y = -2\sin(3x)$ السعة هي :

(a) -3
(b) 3
(c) -2
(d) 2

❖ معادلة الدالة المثلثية $y = tan\,(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ هي :

$(a)\ y = tan\left(\frac{4}{3}\,\pi\, x\right)$
$(b)\ y = tan\left(\frac{3}{4}\ x\right)$
$(c)\ y = tan\left(\frac{3}{4}\,\pi\, x\right)$
$(d)\ y = tan\left(\frac{4}{3}\ x\right)$

❖ مثلث قياسات زواياه $70°\,, 60°\,, 50°$ فإذا كان طول أصغر ضلع فيه هو $9\ cm$ فإن أطول ضلع يساوي تقريبا :

$(a)\ 11\ cm$
$(b)\ 11.5\ cm$
$(c)\ 12\ cm$
$(d)\ 12.5\ cm$

❖ في المثلث ABC : $AC = 40\ cm\,, AB = 30\ cm\,, m(\hat{A}) = 120°$ فإن طول $\overline{BC}$ يساوي تقريبا :

$(a)\ 68\ \mathrm{cm}$
$(b)\ 36\ cm$
$(c)\ 60.8\ cm$
$(d)\ 21\ \mathrm{cm}$

❖ إذا كان : $AB = 12\ cm\,, AC = 17\ cm\,, BC = 25\ cm$ فإن قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي تقريبا :

$(a)\ 118°$
$(b)\ 110°$
$(c)\ 125°$
$(d)\ 100°$

❖ إذا كان $c = 6\ cm\,, b = 3\ cm\,, a = 4cm$ فإن قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوى حوالى :

$(a)\ 117°$
$(b)\ 110°$
$(c)\ 125°$
$(d)\ 100°$

❖ مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه : $9\ cm\,, 8\ cm\,, 7\ cm$ هي :

$(a)\ 6\sqrt{3}\ cm^2$
$(b)\ 12\sqrt{5}\ cm^2$
$(c)\ 16\sqrt{3}\ cm^2$
$(d)\ 18\sqrt{3}\ cm^2$

❖ مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه : $6\ cm , 4\ cm , 8\ cm$ هي :

(a) $5\sqrt{3}\ cm^2$ (b) $3\sqrt{15}\ cm^2$

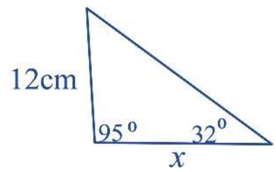
(c) $3\sqrt{5}\ cm^2$ (d) $\sqrt{15}\ cm^2$

❖ في مثلث ABC : $BC = 20\ cm , AC = 10\ cm , m(\widehat{C}) = 60°$ يساوي :

(a) $10\sqrt{3}\ cm$ (b) $10\sqrt{7}\ cm$

(c) $12.4\ cm$ (d) $29\ cm$

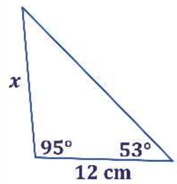
❖ في المثلث المقابل ، x تساوي حوالى :



(a) $8.6\ cm$ (b) $15\ cm$

(c) $18.1\ cm$ (d) $19.2\ cm$

❖ في المثلث المقابل ، x تساوي حوالى :



(a) $8.6\ cm$ (b) $15\ cm$

(c) $18.1\ cm$ (d) $19.2\ cm$

❖ مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي :

(a) $\frac{1}{2}a^2\ units^2$ (b) $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}\ units^2$

(c) $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\ units^2$ (d) $a^2\ units^2$

❖ $cos\left(h+\frac{\pi}{2}\right) =$

(a) $-\sin h$ (b) $\sin h$

(c) $\cos h$ (d) $-\cos h$

❖ إذا كان : $a = 2\ cm\ , b = 3\ cm\ , m(\widehat{C}) = 40°$ فإن مساحة المثلث ABC حوالى :

(a) $4.6\ cm^2$

(b) $3.86\ cm^2$

(c) $1.93\ cm^2$

(d) $2.3\ cm^2$

❖ مجموعة حل المعادلة : $\tan(x) = -\sqrt{3}$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$ هي x تساوي .....

(a) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

(b) $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$

(c) $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

(d) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

❖ $\cos 94° \cos 18° + \sin 94° \sin 18°$ تساوي :

(a) $\cos 112°$

(b) $\sin 112°$

(c) $\sin 76°$

(d) $\cos 76°$

❖ $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ يساوي :

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$

(b) $\sin\frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$

(d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

❖ إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن الربع الذي تقع فيه x هو :

(a) الأول أو الثالث

(b) الثاني أو الرابع

(c) الثالث

(d) الأول

❖ المقدار : $1 + \frac{\cos x}{\csc x} + \frac{\sin x}{\csc x}$ متطابق مع المقدار :

(a) 1

(b) -1

(c) 2

(d) -2

❖ $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ تساوي :

(a) $\csc x$ (b) $\csc 2x \cos x$

(c) $\tan 2x$ (d) $\tan x$

❖ المقدار : $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\cot^2 x$ (b) $\tan^2 x$

(c) $\cot^2 x \cos^2 x$ (d) $\tan^2 x . \sin^2 x$

❖ $\sin 2\theta =$

(a) $\cos\theta \sin\theta$ (b) $\sin^2\theta$

(c) $\cos^2\theta$ (d) $2\cos\theta\sin\theta$

❖ $2\cos^2\frac{x}{2}$ تساوي :

(a) $1+\cos 2x$ (b) $1+\cos x$

(c) $\frac{1-\cos 2x}{2}$ (d) $\frac{1+\cos x}{2}$

❖ $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي :

(a) $1+\tan h$ (b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

(c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ (d) $1-\tan h$

❖ المقدار : $\frac{1}{\tan x}+\tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \cos x$ (b) $\sec x \sin x$

(c) $\sec x \csc x$ (d) $\sin x \cos x$

❖ إذا كان $\pi_1 // \pi_2$, $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{l}$, $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{m}$ فإن :

$(a)\ \pi // \pi_1$

$(b)\ \pi // \pi_2$

$(c)\ \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

$(d)\ \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$

❖ $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي :

$(a)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

$(b)\ \sqrt{2}+\sqrt{6}$

$(c)\ 2+\sqrt{3}$

$(d)\ -2-\sqrt{3}$

❖ $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي :

$(a)\ \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$(b)\ \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

$(c)\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

$(d)\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

❖ المقدار : $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

$(a)\ \sin x \tan x$

$(b)\ \sin x \sec^2 x$

$(c)\ \cos x \sec^2 x$

$(d)\ \sin x \csc x$

❖ إذا كان : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$

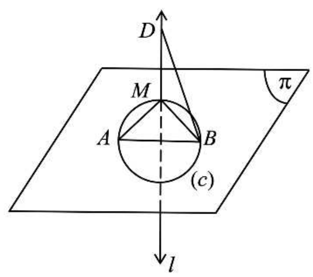
$(a)\ \pi_1 // \pi_2$

$(b)\ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$

$(c)\ \pi_1 \perp \pi_2$

$(d)\ \pi_1 = \pi_2$

❖ في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$, $\overleftrightarrow{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن



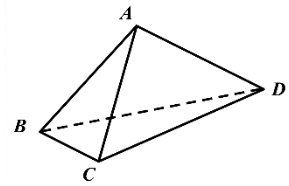
$(a)\ \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

$(b)\ \overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

$(c)\ \overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$

$(d)\ \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$

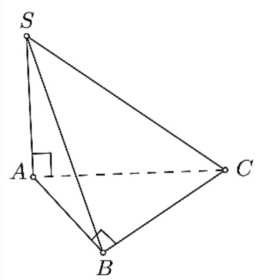
❖ في الشكل المقابل : النقاط $B\,,C\,,D$ تعين :



(b) مستويا واحدا　　　(a) مستويين مختلفين

(d) عدد لا منته من المستويات　　　(c) لا يمكن أن تعين مستوى

❖ في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)\,, m(A\hat{B}C) = 90°$ فإن :



(b) $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$　　　(a) المثلث SAB قائم في $\hat{B}$

(d) المثلث SCB قائم في $\hat{C}$　　　(c) المثلث SAB متطابق الضلعين

❖ إذا توازى مستويان مختلفان و قطعهما مستو ثالث فإن خطى التقاطع :

(b) متقاطعان　　　(a) متعامدان

(d) متوازيان　　　(c) متخالفان

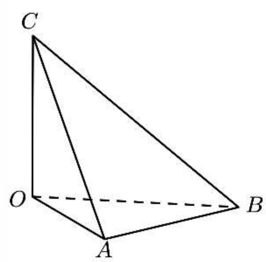
❖ الحاجة التي لا تعين مستويا وحيدا فيما يلي هي :

(b) أي مستقيم و نقطة خارجة عنه　　　(a) أي ثلاث نقاط مختلفة

(d) أي مستقيمان متقاطعان في نقطة　　　(c) أي مستقيمان متوازيان مختلفان

❖ في الشكل المقابل إذا كان OAB مثلث فيه $m(A\hat{O}B) = 60°\,, OB = 2x\,, OA = x$

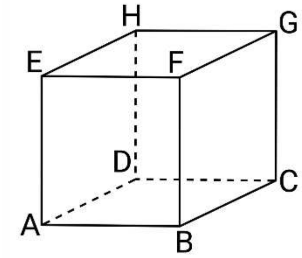
$\overrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوى OAB فإن قياس الزاوية الزوجية $(AOC\,,\overrightarrow{OC}\,,BOC)$



(b) $45°$　　　(a) $30°$

(d) $90°$　　　(c) $60°$

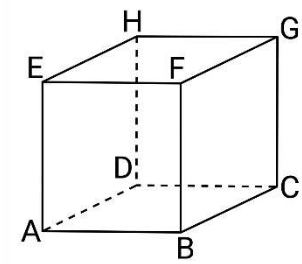
❖ في المكعب $ABCDEFGH$, $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{BD}$ هما :



(b) متقاطعان | (a) متوازيان

(d) يحويهما مستو واحد | (c) متخالفان

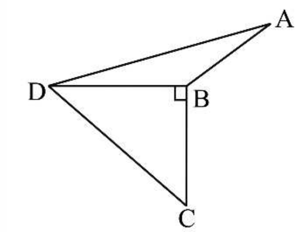
❖ يمثل الشكل المقابل مكعبا $ABCDEFGH$, المستقيمان $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{HF}$ هما :



(b) متقاطعان | (a) متخالفان

(d) متوازيان | (c) يحويهما مستو واحد

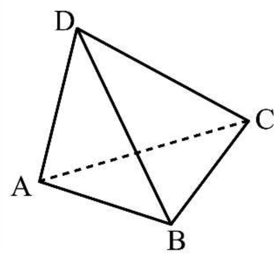
❖ في الشكل المقابل : المثلث DBC قائم الزاوية في B فإذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (DBC)$ فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي :



(b) $A\hat{B}C$ | (a) $D\hat{B}C$

(d) $A\hat{D}C$ | (c) $A\hat{B}D$

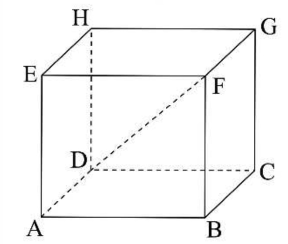
❖ في الشكل المقابل ، المثلث ABC متطابق الأضلاع ، $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على (ABC) فإن قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BAD , \overrightarrow{DA} , DAC)$ هي :



(b) $30°$ | (a) $45°$

(d) $60°$ | (c) $80°$

❖ يمثل الشكل المقابل مكعبا إذا كان طول حرفه $3\ cm$ فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي :



(a) $18\ cm$

(b) $9\ cm$

(c) $3\sqrt{3}\ cm$

(d) $\sqrt{3}\ cm$