نماذج أجابة أسئله أمتحان تقييمى ثانى

عمل / أ . أحمد نصار

(1)

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

حلل المقام

$2x^3 - 5x^2 - 3x = x(2x^2 - 5x - 3) = x(2x+1)(x-3)$

اصفار المقام 0 $-\frac{1}{2}$ 3

بالضرب في $x(2x+1)(x-3)$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2 - 2 = A(2x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(2x+1) \quad 1$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x = 0$

$$-2 = A(2(0)+1)(0-3) + \cancel{B(0)} + \cancel{C(0)} \qquad A = \frac{2}{3}$$

بالتعويض في 1 بـ $x = -0.5$

$$(-0.5)^2 - 2 = \cancel{A(0)} + B(-0.5)(-0.5-3) + \cancel{C(0)} \qquad B = -1$$

بالتعويض في 1 بـ $x = 3$

$$(3)^2 - 2 = \cancel{A(0)} + \cancel{B(0)} + C(3)(2(3)+1) \qquad C = \frac{1}{3}$$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$A = \frac{2}{3}$

$B = -1$

$C = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{-1}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + C$$

(2)

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

حلل المقام $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x\,(x-1)^2$

اصفار المقام: 0 ، 1 مكرر

الأصفار	0	1	1
المقامات	x	$x-1$	$(x-1)^2$

بالضرب في $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$4x^2-4x+1 = A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$ 1

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$1 = A(0-1)^2+\cancel{B(0)}+\cancel{C(0)}$$ A= 1

بالتعويض في 1 بـ $x=1$

$$4(1)^2-4(1)+1 = \cancel{A(0)}+\cancel{B(0)}+C(1)$$ C = 1

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و A, C من الحل

بالتعويض في 1 بـ $x=2\,, A=1\,, C=1$

$$4(2)^2-4(2)+1 = (1)(2-1)^2+B(2)(2-1)+(1)(2)$$ B = 3

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

A = 1

B = 3

C = 1

$$\int \frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

(3)

حلل المقام

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$

$$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$$

اصفار المقام: -4 ، 0 مكرر

الأصفار	0	0	-4
المقامات	x	x^2	$x+4$

بالضرب في $x^2(x+4)$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+4}$$

$$x^2+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$0^2+1 = \cancel{A(0)} + B(0+4) \cancel{+C(0)} \qquad B = \frac{1}{4}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-4$

$$(-4)^2+1 = \cancel{A(0)} \cancel{+B(0)} + C(-4)^2 \qquad C = \frac{17}{16}$$

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و B, C من الحل

بالتعويض في 1 بـ $x=1$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{17}{16}$

$$(1)^2+1 = A(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}(1)^2 \qquad A = \frac{-1}{16}$$

تابع الحل

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+4}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{\frac{-1}{16}}{x}+\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$

$A = \frac{-1}{16}$

$B = \frac{1}{4}$

$C = \frac{17}{16}$

$$\int \frac{x^2+1}{x(x+4)^2}\,dx = \int \frac{\frac{-1}{16}}{x}+\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{-1}{16}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2}\,dx + \int \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$$

(4)

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$$

∵ درجة البسط = درجة المقام

∴ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$1 \longleftarrow$ ناتج القسمة

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ \hline x^2 - 4x + 4 & x^2 - 3x + 7 \\ & -\ x^2 - 4x + 4 \\ \hline & \quad x + 3 \end{array}$$

$x + 3 \longleftarrow$ الباقي

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط

$$x+3 = A_1(x-2) + A_2$$

عوّض عن x بـ 2

$$2+3 = A_1(0) + A_2$$

$$\therefore\ A_2 = 5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1+3 = -A_1 + 5$$

$$\therefore\ A_1 = 1$$

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

(5)

بأستخدام القسمه المطولة:

A)

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7 = A_1(x-3) + A_2$$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore \quad A_2 = 20$

عوّض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$$\therefore \quad A_1 = 9$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}dx = x + 9\ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

B)

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore \quad A_1 = 3$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore \quad A_2 = -2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= 2x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

(6)

$$\int x\cos x\,dx$$

الحل:

$$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \sin x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

(7)

$$\int (4x-1)\ln x\ dx$$

الحل :

$$u = \ln x \qquad dv = (4x-1)dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = 2x^2 - x = x(2x-1)$$

$$\int u\,dv = u\,.v - \int v\,du$$

$$\int (4x-1)\ln x\ dx$$
$$= x(2x-1)\ln x - \int \frac{1}{x}\,.x(2x-1)dx$$
$$= x(2x-1)\ln x - \int (2x-1)dx$$
$$= x(2x-1)\ln x - (x^2 - x) + c$$
$$= x(2x-1)\ln x - x^2 + x + c$$

(8)

$$\int 4xe^{-5x}\,dx$$

الحل :

$$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}dx$$

$$du = 4dx \qquad v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int 4xe^{-5x}dx = 4x\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) - \int -\frac{4}{5}e^{-5x}dx$$

$$= -\frac{4}{5}x\,e^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$$

(9)

$$\int \ln x\;dx$$

الحل :

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln x\;dx = x\,ln\,x - \int x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,(x) - x + C$$

(10)

$$\int x^2 \sin x \ dx$$

الحل :

$$u = x^2 \qquad dv = \sin x \, dx$$
$$du = 2xdx \qquad v = -cosx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\int x^2 \sin x \ dx = -x^2 \cos x + \int 2xcos\ x\, dx$$

$$u = 2x \qquad dv = \cos x \, dx$$
$$du = 2\ dx \qquad v = \sin x$$

$$\int 2xcos\ x\, dx = 2xsin\ x \ - \int 2 \sin x \, dx$$
$$= 2xsin\ x + 2cos\ x + C$$

$$\therefore \int x^2 \sin x \ dx = -x^2 \cos x + 2x\ sin\ x + 2 \cos x + C$$

(11)

$$\int x\, sin(5x) dx$$

$$u = x \qquad dv = sin(5x)dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{-cos(5x)}{5}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\, sin(5x)dx$$
$$= \frac{-1}{5} x\, cos(5x) - \int \frac{-cos(5x)}{5} dx$$
$$= \frac{-1}{5} x\, cos(5x) + \frac{1}{5} \int cos(5x)\, dx$$
$$= \frac{-1}{5} x\, cos(5x) + \frac{1}{5}\left(\frac{sin(5x)}{5}\right) + c$$
$$= \frac{-1}{5} x\, cos(5x) + \frac{1}{25}(sin(5x)) + c$$

(12)

أوجد: $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

الحل

$I = \int 2x^2 \cdot \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = 2x^2 \, dx$

$du = \frac{1}{x} \, dx \qquad \int \quad v = \frac{2}{3} x^3$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$I = \ln x \cdot \frac{2}{3} x^3 - \int \frac{2}{3} x^{\cancel{3}\,2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$

$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \int x^2 \, dx$

$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C$

$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{9} x^3 + C$

(13)

$$\int x^2 e^{2x-3} dx$$

$u = x^2 \qquad dv = e^{2x-3} dx$

$du = 2x dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^2 e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3}$$

$$- \int x e^{2x-3} dx \ldots\ldots\ldots (1)$$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$$\int x e^{2x-3} dx$$

$u = x \qquad dv = e^{2x-3} dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{2} \int e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{4} e^{2x-3} + c \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نحصل على

$$\therefore \int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2} x e^{2x-3} + \frac{1}{4} e^{2x-3} + c$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x-3} + c$$

(14)

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$$f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2\ ,\ 1]$$

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x-3)(x+3) = 0$$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 3$ $\qquad$ $x = -3$

$0 \in (-2, 1)$ $\qquad$ $3 \notin (-2, 1)$ $\qquad$ $-3 \notin (-2, 1)$

$$A = \left| \int_{-2}^{0} f(x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} f(x)dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 - 9x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - 9x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{1} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{9}{2}(-2)^2\right] \right| + \left| \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{9}{2}(1)^2\right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2\right] \right| = \frac{73}{4} \text{ square units}$$

(15)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = \cos x \ , \ [0 \ , \ \pi]$

الحل :

نلاحظ أنه في الفترة $[0, \pi]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x)dx \right|$$

$$= \left| [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| (sinx)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

$$= \left| \left[\sin(\frac{\pi}{2})\right] - [\sin(0)] \right| + \left| [\sin(\pi)] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \right| = 2 \quad square \ \ units$$

(16)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل:

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$x = 0$ أو $x = 3$

نبحث هل $f(x) \leqslant 0$ أو $f(x) \geqslant 0$ في $[0, 3]$

$$\because \quad f(x) \leqslant 0 \qquad \forall\, x \in [0, 3]$$

$\therefore$ المساحة:

$$A = -\int_0^3 f(x)\,dx$$

$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= -\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right]$$

$$= -\left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{2} \quad \text{units square}$$

ملاحظه:

يمكن حل السؤال بطريقه المطلق دون الاحتياج لخطوه اختبار الداله موجبه ولا سالبه.

(17)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $f(x) = x^2 + 1 \ , \ g(x) = -x^2 + 9$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع $f(x) = g(x)$

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

يكون التكامل من $x = -2$ إلى $x = 2$ ومساحة المنطقة هي:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{2} (x^2 + 1 + x^2 - 9)dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)dx \right|$$

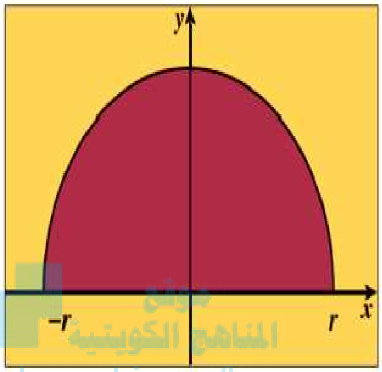
$$= \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2(2)^3}{3} - 8(2) \right] - \left[\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2) \right] \right|$$

$$= \frac{64}{3}$$ (وحدة مربعة)

(18)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



شكل توضيحي

الحل :

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها $(0,0)$ و طول نصف قطرها r

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كرة

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left(\left[r^2 (r) - \frac{1}{3} (r)^3 \right] - \left[r^2 (-r) - \frac{1}{3} (-r)^3 \right] \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \ \ cubic\ units$$

(19)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f:
$f(x)=\sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1,5]$.

الحل :

$$V=\pi\int_{1}^{5}(f(x))^2dx$$

$$=\pi\int_{1}^{5}(\sqrt{x-1})^2dx$$

$$=\pi\int_{1}^{5}(x-1)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^5$$

$$=\pi\left(\left[\frac{(5)^2}{2}-(5)\right]-\left[\frac{(1)^2}{2}-(1)\right]\right)$$

$$=8\pi \quad cubic\ units$$

(20)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين
$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$: g

الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = \sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0)$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

نحصل على: $x = 0 \ , \ x = 1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$

نوجد المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 \quad , \quad -3 < 0$$

$\therefore$ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0, 1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0, 1)$ ولتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران: $V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx$

$$V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{(x)})^2 - (x^2)^2\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{3}{10}\pi \quad \text{units cube}$$

(21)

اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$f(x)=\frac{x^2}{2}+1 \ , \ g(x)=\frac{x}{2}+2$

الحل : نوجد نقاط التقاطع

$$f(x)=g(x)$$

$$\frac{x^2}{2}+1=\frac{x}{2}+2$$

$$\frac{x^2}{2}+1-\frac{x}{2}-2=0$$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-1=0$$

$$x=2 \quad , \quad x=-1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-1,2)$ و لتكن $x=0$

$$f(0)=\frac{(0)^2}{2}+1=1$$

$$g(0)=\frac{(0)}{2}+2=2$$

$$g(x)\geq f(x)\geq o \quad \forall x \in[-1,2]$$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}((g(x))^2-(f(x))^2)dx=\pi\int_{-1}^{2}((\frac{x}{2}+2)^2-(\frac{x^2}{2}+1)^2)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(\left(\frac{x^2}{4}+2x+4\right)-\left(\frac{x^4}{4}+x^2+1\right))dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(\frac{x^2}{4}+2x+4-\frac{x^4}{4}-x^2-1)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(-\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{4}+2x+3)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{4}+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\pi(\left[-\frac{32}{20}-2+4+6\right]-\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+1-3\right])$$

$$=\frac{81}{10}\pi \ cubic\ units$$

(22)

حاله خاصة :

تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x=-1$ إلى $x=2$ ويتقاطعا عند النقطة $x=\frac{1}{2}$..

$$V=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}[(-x+3)^2-(x+2)^2]dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}[(x+2)^2-(-x+3)^2]dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(5-10x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-5+10x)dx$$

$$=[5x-5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}}+[-5x+5x^2]_{\frac{1}{2}}^{2}=$$ 22.5 unit cub