الإدارة العامة لمنطقة الأحمدي التعليمية

التوجيه الفني للرياضيات

دفتر الطالب

لمادة الرياضيات

للصف الحادي عشر العلمي

الفصل الدراسي الثاني

إعداد : قسم الرياضيات في ثانوية عبدالله بن عباس

رئيس القسم : أ . محمد خير فلاح

مدير المدرسة : أ . فيصل السلامين

2023-2024

الوحدة التخيلية : هي العدد الذي مربعه (-1) و يرمز له بالرمز $\boldsymbol{i}$　　Imaginary

$\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$, $\boldsymbol{i}^2 = -1$

- الأعداد التخيلية : لأي عدد حقيقي موجب m ، $\Longleftarrow$ $\sqrt{-m} = \sqrt{m}\,\mathrm{i}$
- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in R^*$ أعداد تخيلية

مجموعة الجذور التربيعية الموجبة و السالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكون مجموعة الاعداد التخيلية

كتاب الطالب حاول أن صـ ١٣ رقم ١ : بسط كلا مما يلي مستخدما الوحدة التخيلية i

(a) $\sqrt{-2}$　　(b) $-\sqrt{-8}$　　(c) $\sqrt{-36}$

تعريف العدد المركب : هو عدد على الصورة $z = a + b\,i$ حيث $a.b$ عددان حقيقيان ، i الوحدة التخيلية

و يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + b\,i$ و تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب
حيث a الجزء الحقيقي Real Part ، حيث b الجزء التخيلي Imaginary Part

و يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

$z = a + b\,i$
↓ ↓
الجزء الحقيقي　الجزء التخيلي

لاحظ :

و إذا كان $b = 0$ فإن $z = a$ يسمى عددا حقيقيا

و إذا كان $z = b\,i$ عددا تخيليا فإن $a = 0$

أكمل الجدول :

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$2 + 3\,i$	2	3
	4	-5
$i - 1$		
7		
	0	-1

اليوم :   التاريخ : / /

العنوان : تابع الأعداد المركبة   بند 1 - 7

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤ رقم ٢ : أكتب كلا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية :

(a) $\sqrt{-18}+7$

(b) $\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$

(c) $\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$

- كل عدد حقيقي هو عدد مركب . $a = a + 0\,i$
- مجموعة الأعداد الحقيقية و مجموعة الأعداد التخيلية هما مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد المركبة .

المخطط التالي يوضح ذلك

الأعداد المركبة

الأعداد الحقيقية

الأعداد النسبية $\frac{4}{7}$ ، 0.3

الأعداد الصحيحة -1,2,-3

الأعداد الكلية 0,1,2,3,7

الأعداد الغير النسبية $-\sqrt{2}$ ، e ، π

الأعداد التخيلية $-\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$ ، $2\,\boldsymbol{i}$

تساوي عددين مركبين

يتساوي عددان مركبان إذا و فقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان و تساوى جزءاهما التخيليان

و ليكن :

$$z_1 = a_1 + b_1 i \text{ ، } z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ، } b_1 = b_2$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٥ رقم ٣ : أوجد قيم x،$y \in R$ في كل مما يأتي

(a) $x + 5i = 7 - 3y\,i$

(b) $(x+3) - y^2\,i = 5 - y\,i$

اليوم :   التاريـــخ :   /   /

العنـــوان : **التمثيل البياني للعدد المركب**   **بند 1 - 7**

ملحوظة : إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر و جزءه التخيلي يساوي الصفر

$$x + y\,i = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ، } y = 0$$

التمثيل البياني لعدد مركب

يمكن وضع العدد المركب $z = a + b\,i$ على صورة الزوج المرتب (a,b)

حيث : الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي و الإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي

$$z = a + b\,i \longleftrightarrow (a,b)$$

الصورة الجبرية   الصورة الديكارتية

كل نقطة في المستوى الإحداثي تمثل عدد مركبا ، و كل عدد مركب يناظر (تمثله) نقطة في المستوى الإحداثي في هذه الحالة يسمى المستوى الإحداثي المستوى المركب (مستوى أرجاند)
و يسمى محور السينات بالمحور الحقيقي ، و يسمى محور الصادات بالمحور التخيلي .

كتاب الطالب حاول أن تحل ص ١٦ رقم ٤ :

مثل كلا مما يلي في المستوى المركب :

(a) $z_1 = 4 - i$ (b) $z_2 = -3i$

....

....

....

....

(c) $z_3 = -4 - 3\,i$ (d) $z_4 = 2$

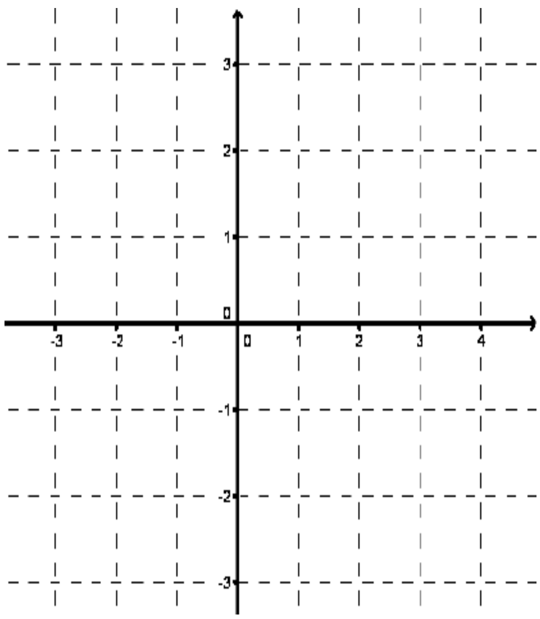
....

....

....

....

....



كتاب الطالب حاول أن تحل ص ١٦ رقم ٥ :

أكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية : k(-7, 0) , H(1 ,-2) , N(-4 , 1)

....

....

....

....

العمليات على الأعداد المركبة

أولا جمع و طرح الأعداد المركبة : في الجمع نجمع جزءيهما الحقيقين معا و نجمع جزءيهما التخيلين معا
كذلك في الطرح نطرح جزءيهما الحقيقين معا و نطرح جزءيهما التخيلين معا

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$ ، $z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي :

الخاصية	$\forall\, z_1 ، z_2 ، z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

كتاب الطالب حاول أن تحل ٦ صـ ١٧ رقم ٦ :

إذا كان $z_3 = -0.3i$ ، $z_2 = 3.4 - 1.2i$ ، $z_1 = -2 + 5i$ فأوجد :

a $z_1 + z_2$

b $z_2 - z_1$

c $z_3 - z_2 - z_1$

ملاحظات :

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $0 = 0 + 0i$
- المعكوس الجمعي للعدد المكب $z = a + b\,i$ هو العدد المركب $-z = -a - b\,i$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرا فإن كلا منهما معكوس جمعي للأخر و العكس صحيح

$$z_1 + z_2 = 0 \Longrightarrow z_1 = -z_2$$

لإيجاد ناتج طرح $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لـ z_2 إلى z_1 أي أن

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ثانيا ضرب الأعداد المركبة

خواص عملية ضرب الأعداد المركبة :

الخاصية	$\forall z_1 , z_2 , z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة $(1 = 1 - 0i)$

لضرب عدديين يمكن إستخدام $i^2 = -1$

كتاب الطالب حاول أن تحل ص ١٩ رقم ٧ : أوجد ناتج

c) $(12i)(7i)(i+1)$

a) $(6-5i)(4-3i)$

قاعدة الضرب : $\forall z_1 , z_2 \in \mathbb{C} \quad . \quad c \in R$

حيث $z_2 = a_2 + b_2 i \qquad z_1 = a_1 + b_1 i ,$

يبرهن كسؤال عادي ① $cz_1 = ca_1 + cb_1 i$

برهان الحالة الثانية مطلوب ② $z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

كتاب الطالب حاول أن تحل ص ٢٠ رقم ٨ :

إذا كان $z_2 = 1 + 4i$, $z_1 = 2 - 3i$ فأوجد

b) $z_1 . z_2$

a) $\frac{1}{2} z_1$

العنـــوان : ضرب و قسمة الأعداد المركبة

قوى العدد المركب (i) كما يلي :

إذا كان P عدد كلي فإن :

$$i^{4P} = 1 \quad . \quad i^{4P+1} = i \quad . \quad i^{4P+2} = -1 \quad . \quad i^{4P+3} = -i$$

فمثلا :

$i^{15} = i^{4\times3+3} = -i$ $\qquad$ $i^{2013} = i^{4\times503+1} = i$ $\qquad$ $i^{29} = i^{4\times7+1} = i$

تدريب : $i^{101} =$ $\qquad$ $i^{82} =$ $\qquad$ $i^{59} =$ $\qquad$ $i^{444} =$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢١ رقم ٩ : أوجد

(a) $5i^{73}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ثالثا قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب :

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

ملاحظة :

لإيجاد مرافق العدد المركب يجب أن يكون العدد المركب على الصورة الجبرية $z = a + bi$ حيث $\forall\, a ، b \in R$

خواص مرافق العدد المركب :

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \;,\; z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن

- $\overline{(\bar{z}_1)} = z_1$
- $\overline{z_1 \; z_2} = \bar{z}_1 \; \bar{z}_2$
- $z_1 + \bar{z}_1 = 2a_1$
- $z_1 - \bar{z}_1 = 2b_1$
- $z_1 \; \bar{z}_1 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2}$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٢ رقم ١٠ :

إذا كان $z_2 = 3 + 5i$ ، $z_1 = 2 - 7i$ فأوجد :

(d) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$　　(c) $\overline{(z_1 \cdot z_2)}$　　(b) $\overline{(z_1 - z_2)}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ هو z^{-1}

أي أن :

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} \Longrightarrow z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٣ رقم ١١ : أوجد المعكوس الضربي لكل من :

(c) $z_3 = 6i$　　(a) $z_1 = -3i - 7$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٤ رقم ١٢ :

أوجد ناتج قسمة $6i - 3$ على $1 + 2i$

التاريـــخ :   /   /   اليوم :

العنـــوان : تابع قسمة الاعداد المركبة   **بند 1 - 7**

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٤ رقم ١٣ :

أكتب كلا من مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب :

(b) $\dfrac{2-i}{2+i}$

(a) $\dfrac{3+i}{2+5i}$

(c) $\dfrac{5+i}{2-3i}$

كراسة التمارين صـ ٩ رقم ٢٢ : بسط ما يلي : $\left(-2+\sqrt{-9}\right)\left(6+\sqrt{-25}\right)$

كراسة التمارين صـ ١٠ رقم ٢٦ : إذا كان $z=\dfrac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\overline{z}$

كراسة التمارين صـ ١٠ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

التاريـــخ :   /   /   اليوم :

العنـــوان : **الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب**   **بند 2 - 7**

القيمة المطلقة لعدد مركب :

هي المسافة بين بين النقطة التي تمثل هذا العدد المركب و نقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب

$z = a + b\,i \longrightarrow |z| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٦ رقم ١ : أوجد

(b) $|-2 + 5\,i|$

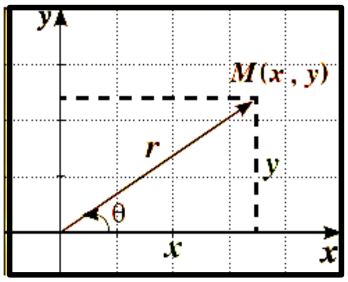
(a) $|6 - 4\,i|$

الإحداثيات القطبية :

يمثل الزوج المرتب $(r.\theta)$ الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب

و يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية و الإحداثيات الديكارتية باستخدام

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٧ رقم ٢ :

أوجد الزوج المرتب $(x.y)$ الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين :

(a) $B\left(2\,,\dfrac{2\pi}{3}\right)$

(a) $A(5,300)$

و يمكن التحويل من الإحداثيات الديكارتية$(x.y)$ إلى الإحداثيات القطبية $(r.\theta)$

باستخدام $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد $\propto$ باستخدام $\tan\propto=\left|\frac{y}{x}\right|$

ثم نحدد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كل من x,y و نوجدها

كتاب الطالب حاول أن تحل ص ٢٨ رقم ٣ :

أوجد الزوج المرتب $(r.\theta)$ لكل من نقطة مما يلي حيث $0\le\theta<2\pi$

a $C(4.-2\sqrt{5})$

a $D(3\sqrt{3},3)$

الصورة المثلثية

يمكن كتابة العدد المركب $z=\sqrt{x^2+y^2}$ على الصورة :

$z=r\,(\cos\theta+i\sin\theta\,)$ و تعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z

و يسمى r مقياس العدد أو القيمة المطلقة و يرمز له $|z|$ و يتعين بالعلاقة $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

، θ سعة العدد المركب و تتعين من $\cos\theta=\frac{x}{r}$ ، $\sin\theta=\frac{y}{r}$

أو من $x\neq0$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ و تحديد الربع

ملاحظة : الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة ، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x+yi$
فإن كلا مما يلي سعة للعدد نفسه : $\theta+2\pi\ ,\ \theta+4\pi\ldots\ldots\theta+2\pi k\ :\ k\in Z$
و إذا كانت $\theta\in[0.2\pi)$ أو $0\le\theta<360$ فتسمى السعة في هذه الحالة بالسعة الأساسية .

العنـــوان : تابع الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب　　　　بند 2 - 7

كتاب الطالب حاول أن تحل ص ٢٨ رقم ٤ :

ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية :

ⓒ $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

ⓐ $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} i$

كتاب الطالب حاول أن تحل ص ٢٨ رقم ٥ : ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية : $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

ⓑ $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\ \cos\frac{\pi}{4}\right)$

ⓐ $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3}\right)$

ⓓ $3\,(\cos 50 - i\ \sin(-130))$

ⓒ $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)$

اليوم :   التاريخ :   /   /

العنوان : تابع الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب   بند 2 - 7

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣١ رقم ٦ : ضع كلا مما يلي في الصورة الجبرية :

ⓑ $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\ \sin\frac{5\pi}{3}\right)$

ⓐ $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)$

الصورة المثلثية في حلات خاصة :

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على خط الأعداد على المحور الأفقي (محور السينات) .
وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على المحور التخيلي (محور الصادات)

العدد	المقياس	سعة (الراديان)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

ملاحظة : إذا كان $Z = 0$ فإن : غير معينة θ . $r = 0$. $y = 0$. $x = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣١ رقم ٦ :

ضع في الصورة المثلثية كلا من الأعداد التالية

ⓓ $z_4 = -\frac{3}{4}i$

ⓒ $z_3 = \frac{-3}{4}$

ⓑ $z_2 = 5$

ⓐ $z_1 = 2i$

كراسة التمارين صـ ١٣ البنود الموضوعية

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

حل معادلات الدرجة الأولى :

نحل معادلات الدرجة الأولي في الأعداد المركبة بنفس الطريقة التي نحل بها في الأعداد الحقيقية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣٣ رقم ١ :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كتاب الطالب مثال صـ ٣٤ رقم ٢ :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z + i\bar{z} = 5 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣٤ رقم ٢ :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + i = 2\bar{z} + 1$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

اليوم : التاريــخ : / /

العنـــوان : تابع حل المعادلات بند 3 - 7

ثانيا حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣٥ رقم ٣ :

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$

ⓐ $3x^2 + 48 = 0$

ⓑ $-5x^2 - 150 = 0$

ⓒ $8x^2 + 2 = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣٥ رقم ٤ :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

الجذر التربيعي لعدد مركب :

لإيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب Z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي Z

ليكن $Z = a + bi$ نبحث عن $w = m + ni$ بحيث يكون : $w^2 = Z$

$$(m + ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

إذن $m^2 - n^2 = a$ ، $2mn = b$

للمساعدة في حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$

أي $\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣٧ رقم ٦ :

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $Z = -3 - 4i$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣٨ رقم ٧ :

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $Z = 5 + 12i$

....

....

....

....

....

....

كراسة التمارين صـ ١٦ البنود الموضوعية

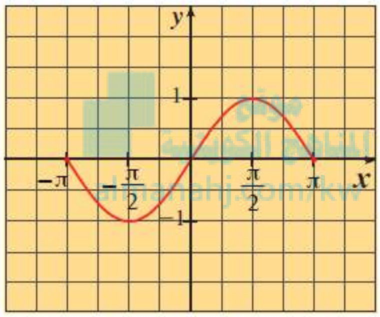
1	2	3	4	5	6	7	8	9	11

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب ، جيب التمام ، الظل)

الدوال الجيبية Sine Functions

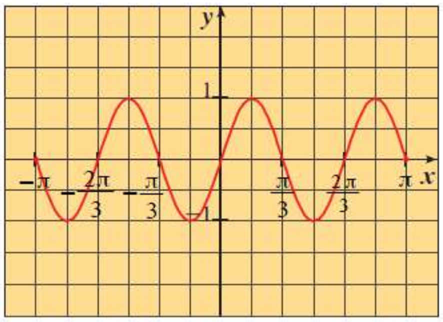
تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $a \neq 0$, $b \neq 0$ وكل منها دالة دورية.

تمثل الأشكال التالية بيانات بعض دوال الجيب:



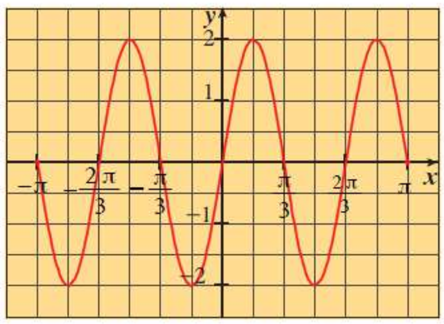
$y = \sin x$

شكل (1)



$y = \sin 3x$

شكل (2)



$y = 2\sin 3x$

شكل (3)

① تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية. ② $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$ ③ $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٤٦ رقم ١ : أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

ⓑ $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$ ⓐ $y = -2\cos 5x$

....

....

....

....

....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٤٦ رقم ٢ :

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

ⓒ الدورة هي 2 ، $a = 1$ ⓑ الدورة هي π ، $a = 0.25$ ⓐ الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

....

....

....

....

....

اليوم :   التاريـــخ :   /   /

العنـــوان : **التمثيل البياني لدالة الجيب**   **بند 1 - 8**

التمثيل البياني للدوال المثلثية :

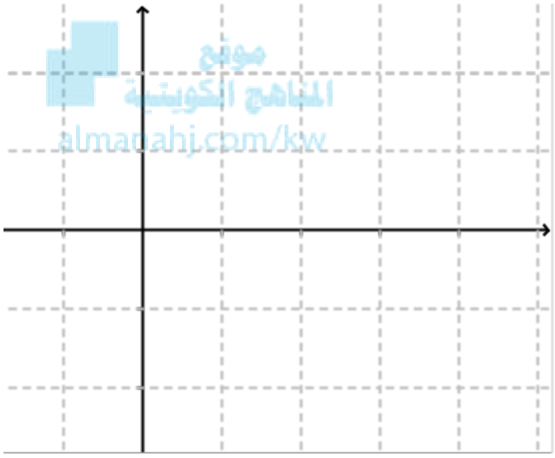
أولا : دالة الجيب

هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، ودالة الجيب هي دالة دورية ذات دورة 2π

للحصول على التمثيل البياني لِ $y=\sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0,2\pi]$ كالتالي:

$y = sinx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx					



من بيان دالة الجيب نلاحظ:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x)=-\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٤٨ رقم ٣ :

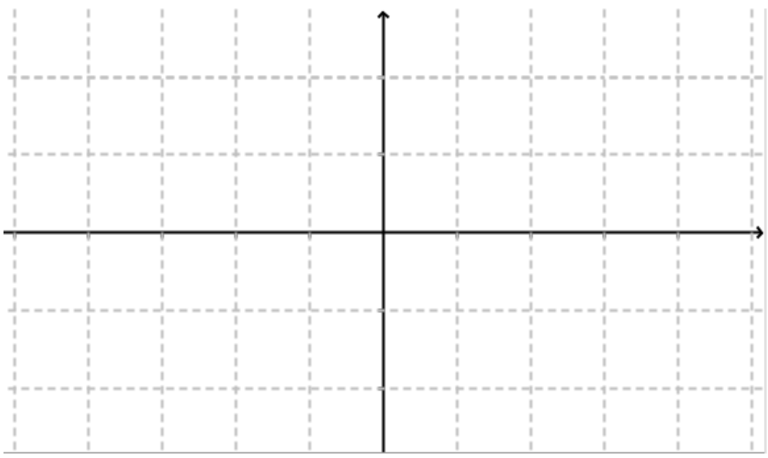
أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان كل من:

a) $y=\frac{1}{2}\sin 4x$

....

....

....



....

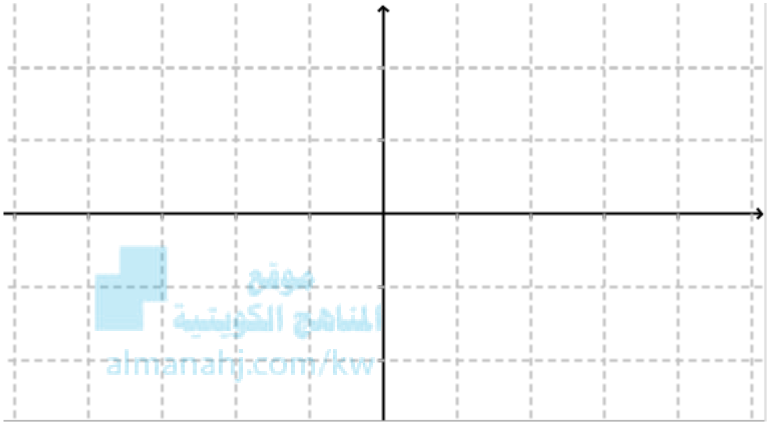
....

اليوم :   التاريـــخ :   /   /

العنـــوان : تابع التمثيل البياني لدالة الجيب   بند 8 - 1

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٤٨ رقم ٣ : أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان كل من:

b $y = -4\sin x \ , \ x \in [-\pi \ , \ 2\pi]$



التاريــخ : / /   اليوم :

العنـــوان : **التمثيل البياني لدالة جيب التمام**   **بند 1 - 8**

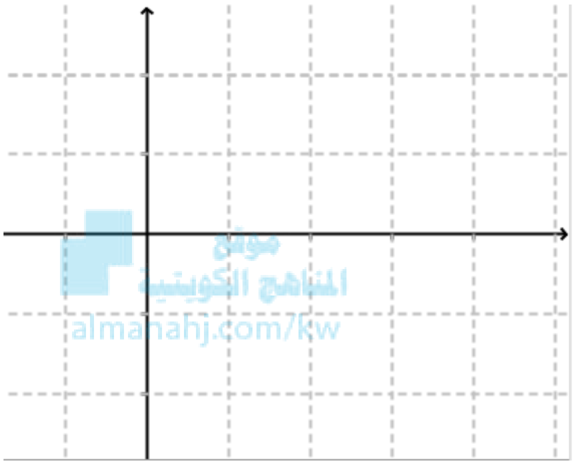
دالة جيب التمام :

مجال دالة جيب التمام $y = \cos x$، هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π

ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0, 2\pi]$

$y = cosx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx					



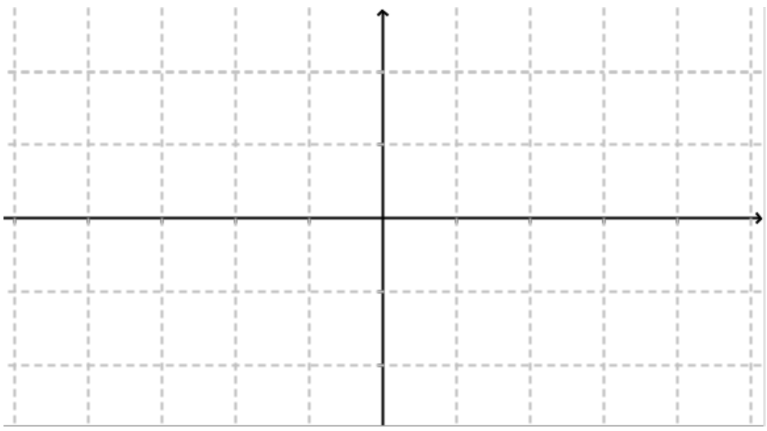
من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \cos x$ قيمة عظمى عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى عند $x = \pi + 2n\pi$
3. دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$
4. محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.
5. سعة الدالة هي: $a = \frac{\max f - \min f}{2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل ص 49 رقم ٤ :

أوجد السعة والدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

(a) $y = 3\cos 2x$



اليوم :   **التاريـــخ** :   /   /

العنـــوان : تابع التمثيل البياني لدالة جيب التمام   بند 1 - 8

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٤٩ رقم ٤ : أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة:

ⓑ $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0 \le x \le 2\pi$

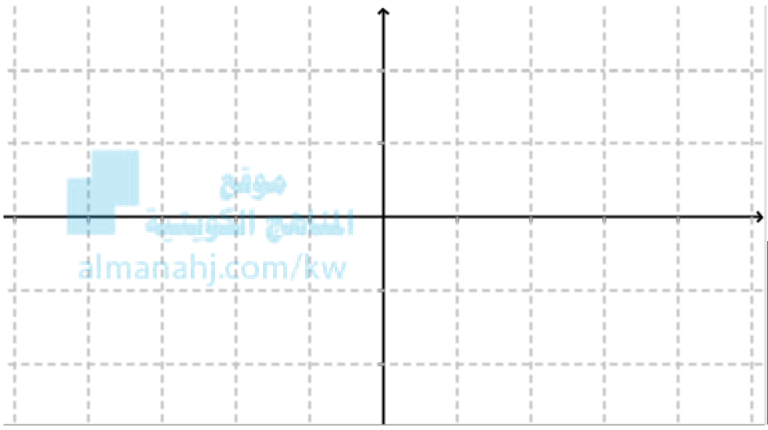
....

....

....

....

....



....

....

....

....

....

العنـــوان : التمثيل البياني لدالة الظل

ثالثا دالة الظل :

هي دالة مثلثية على الصورة:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\ :\ \cos x\neq 0$$

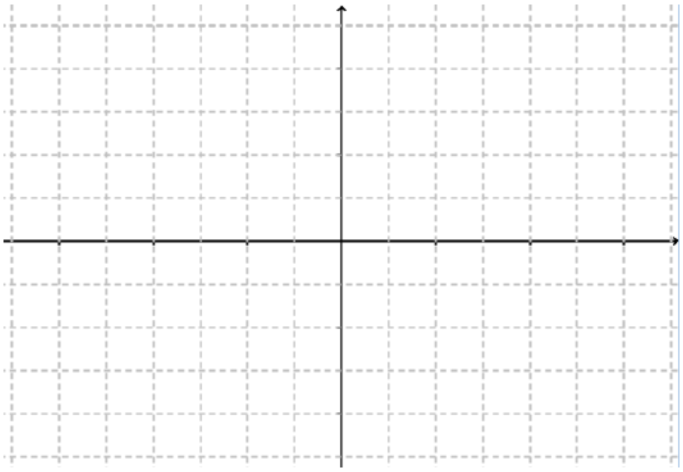
مجالها: $\mathbb{R}-\left\{x:x=\frac{\pi}{2}+n\pi\ ,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y=\tan x$

في دورة واحدة $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
tanx					

من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi)=0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$ غير معرف.
   وتسمى المستقيمات $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y=\tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x)=-\tan x\ ,\ x\in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y=a\tan bx$،
دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ وتكرر نفسها في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b}\ ,\ \frac{\pi}{2b}\right)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٥١ رقم ٥ : أوجد الدورة، ثم ارسم بيان الدالة: $y=-\tan x$ (a)

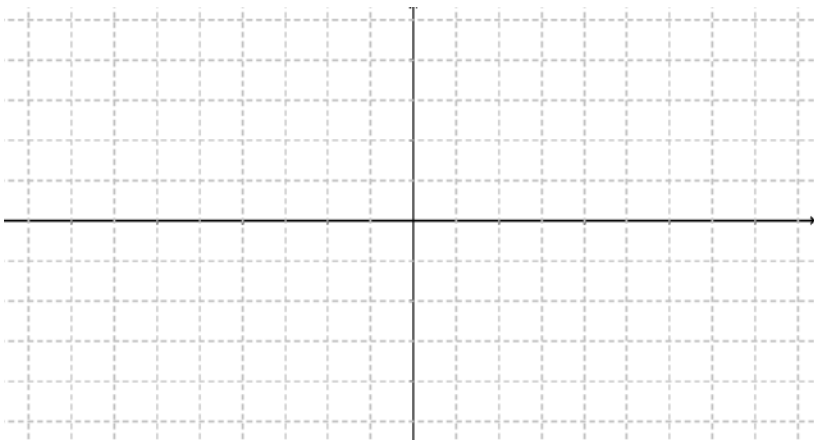
....

....

....

....

....



اليوم :　　　　　　　　**التاريـــخ** : / /

العنـــوان : **تابع التمثيل البياني لدالة الظل**　　　　**بند 1 - 8**

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٥١ رقم ٥ :

أوجد الدورة، ثم ارسم بيان الدالة:　　　(b) $y = \frac{1}{2}\tan x$

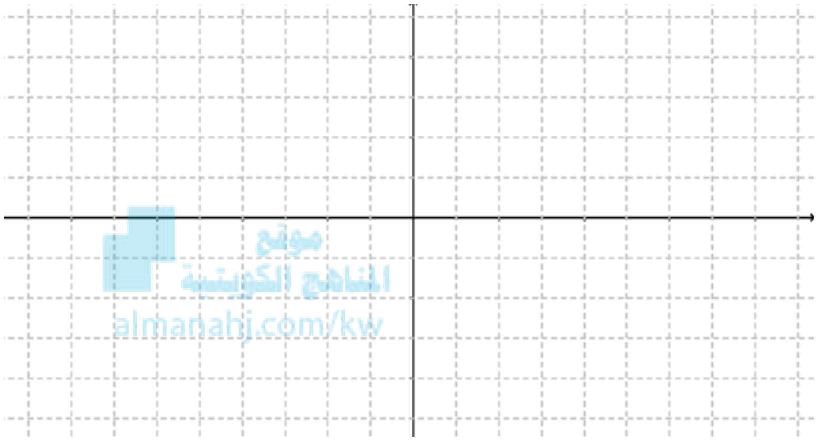
....

....

....

....

....



....

....

....

....

....

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty\ ,\ \infty)$	$(-\infty\ ,\ \infty)$	$\mathbb{R}-\left\{x, x=\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$
المدى	$[-1\ ,\ 1]$	$[-1\ ,\ 1]$	$(-\infty\ ,\ \infty)$
الأصفار	$x =+ n\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$	$x =+ n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

كراسة التمارين صـ ٢٠ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

قانون الجيب

في أي مثلث ABC:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٤ رقم ١ :

حل ΔABC حيث: $\alpha=36^\circ\ ,\ \beta=48^\circ\ ,\ a=8\,\text{cm}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٦ رقم ٢ :

حل ΔABC حيث: $a=7\,\text{cm}\ ,\ b=6\,\text{cm}\ ,\ \alpha=26.3^\circ$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٧ رقم ٣ :

حل ΔABC حيث: $a=6\,\text{cm}\ ,\ b=7\,\text{cm}\ ,\ \alpha=30^\circ$

كراسة التمارين صـ ٢٦ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9

العنـــوان : قانون جيب التمام

قانون جيب التمام

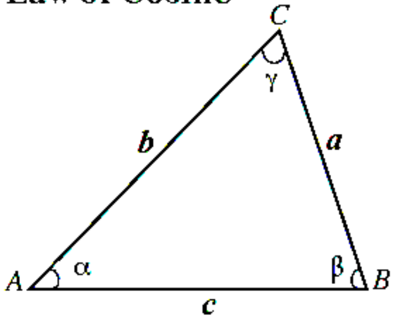
في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Law of Cosine



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم ١ :

حل ΔABC حيث: $a = 11\,\text{cm}\ ,\ b = 5\,\text{cm}\ ,\ \gamma = 20^\circ$

....

....

....

....

....

....

....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم ٢ :

في ΔABC حيث: $a = 9\,\text{cm}\ ,\ b = 7\,\text{cm}\ ,\ c = 5\,\text{cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

اليوم : التاريـــخ : / /

العنـــوان : تابع قانون جيب التمام بند 4 - 8

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣٧ رقم ٣ :

حل ΔABC حيث: $\alpha = 25^\circ$, $b = 6.5\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{cm}$

كراسة التمارين صـ ٢٩ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

التاريـــخ : / /　　　　　　　اليوم :

العنـــوان : مساحة المثلث　　　　　　　بند 5 - 8

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 75 رقم ١ :

أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a=5\text{ cm}\ ,\ b=6\text{ cm}\ ,\ c=8\text{ cm}$

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه $a\,,b\,,c$ بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: (نصف محيط المثلث) $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\text{semiperimeter}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 75 رقم ٢ :

أوجد مساحة ABC حيث: $a=4\text{ cm}\ ,\ b=4\text{ cm}\ ,\ c=3\text{ cm}$

التاريـــخ : / /　　　　اليوم :

بند 5 - 8　　　　العنـــوان : تابع مساحة المثلث

كراسة التمارين حاول أن تحل صـ ٣٠ رقم ٢ :

أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين. $a = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$

كراسة التمارين صـ ٣٠ : البنود الموضوعية

١٠	9	8	7	6	5	4	3	2	1

تذكر ما يلي :

المتطابقات المثلثية الأساسية — Trigonometric Identities

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام) — Quotient Identities (Tangent and Cotangent)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات المقلوب — Reciprocal Identities

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث — Pythagorian Identities

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ ٨٨ رقم ١ :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

....

....

....

....

....

....

....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٨٨ رقم ١ :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

....

....

....

....

....

....

....

التاريـــخ : / /　　　اليوم :

العنـــوان : تابع إثبات صحة متطابقات مثلثية　　　بند 2 - 9

كتاب الطالب مثال صـ ٨٨ رقم ٢ :

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x \csc x = \dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1}$

كتاب الطالب حاول أن تحل ٢ صـ ٨٩ :

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} - \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4\tan x \cdot \sec x$

كتاب الطالب مثال صـ ٨٩ رقم ٣ :

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

التاريـــخ :   /   /   اليوم :

بند 2 - 9   **العنـــوان** : تابع إثبات صحة متطابقات مثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٠ رقم ٣ :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\csc x-\cot x)^2$

كتاب الطالب مثال صـ ٩٠ رقم ٤ :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta}=(\cot\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٠ رقم ٤ :

أثبت أن: $\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$

التاريـــخ : / /　　　　اليوم :

العنــــوان : حل معادلات مثلثية　　　　بند 3 - 9

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٣ رقم ١ :

حل المعادلة : $\sqrt{2}\cos x = 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٤ رقم ٢ :

حل المعادلة : $5\sin\theta - 3 = sin\ \theta$

العنـــوان : تابع حل معادلات مثلثية بند 3 - 9

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٥ رقم ٣ :

حل المعادلة : $\tan x = 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٦ رقم ٥ :

حل المعادلة : $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

التاريـــخ : / /   اليوم :

العنــــوان : تابع حل معادلات مثلثية   بند 3 - 9

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٧ رقم ٥ :

حل المعادلة : $cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

التاريـــخ :   /   /   اليوم :

بند 4 - 9   العنـــوان : متطابقات الدوال المتكافئة

متطابقات الدوال المتكافئة :

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٠ رقم ١ :

أثبت أن : $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٠ رقم ٢ :

أثبت أن : $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

كتاب الطالب مثال صـ ١٠١ رقم ٢ :

أثبت أن : $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\sec\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠١ رقم ٢ :

أثبت أن : $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \csc\theta$

اليوم :　　　　　　　　التاريـــخ :　　/　　/

العنـــوان : متطابقات المجموع و الفرق　　　　　　بند 4 - 9

متطابقات المجموع و الفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$
$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٣ رقم ٣ :

أوجد دون استخدام الالة الحاسبة كلا مما يلي :

$a)\ \sin 15$　　　$b)\ \cos 75$　　　$c)\ \tan 105$

التاريـــخ :   /   /   اليوم :

بند 4 - 9   **العنـــوان** : تابع متطابقات المجموع و الفرق

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٤ رقم ٤ :

إذا كان :

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{-12}{13} \quad , \quad \pi > \beta > \frac{3\pi}{2}$$

أوجد كلا مما يلي : $c)\ \sin(\beta - \alpha)$ $\quad b)\ \tan(\alpha + \beta)$ $\quad a)\ \cos(\alpha + \beta)$

كراسة التمارين صـ ٤٠ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

اليوم :   التاريـــخ :   /   /

العنـــوان : متطابقات ضعف الزاوية   بند 5 - 9

$$\cos 2\theta = cos^2\theta - \ sin^2\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ 105 رقم ١ :

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزواية : $\cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 105 رقم ١ :

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزواية : $\cos 2\theta = 1 - \ 2sin^2\theta$

$$\cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - \ 2sin^2\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ 106 رقم ٢:

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم ٢ :

إذا كان $sin\, x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

العنـــوان : تابع متطابقات ضعف الزاوية   بند 5 - 9

$$\boxed{\sin 2\theta = 2sin\theta\, cos\theta}$$

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٦ رقم ٣ :

إذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، $sin\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ فأوجد $sin\,2\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم ٣ :

إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $cos\,\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $sin\,2\theta$

$$\boxed{tan\,\theta = \frac{2tan\theta}{1 - tan^2\theta}}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٧ رقم ٤ :

إذا كان : $\tan\theta = \sqrt{3}$ استخدم متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٧ رقم ٥:

أثبت صحة المتطابقة : $\cos 2\theta = \frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٧ رقم ٥ :

أثبت صحة المتطابقة : $2cos\, 2\theta = 4\, cos^2\theta - 2$

اليوم :   التاريــخ :   /   /

العنـــوان : تابع متطابقات ضعف الزاوية   بند 5 - 9

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٨ رقم ٦ :

أثبت صحة المتطابقة : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 108 رقم ٦ :

أثبت صحة المتطابقة : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٩ رقم ٧ :

إستخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15$

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٩ رقم ٨ :

إذا كانت : $180 < \theta < 270$. $\cos\theta = \frac{-24}{25}$ فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$

التاريـــخ :   /   /   اليوم :

العنــــوان : تابع متطابقات نصف الزاوية   بند 5 - 9

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٩ رقم ٨ :

إذا كانت : $180 < \theta < 270$. $\cos\theta = \frac{-24}{25}$ فأوجد $\tan\frac{\theta}{2}$. $\cos\frac{\theta}{2}$

كراسة التمارين صـ ٤٣ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8

اليوم :

التاريـــخ : / /

العنـــوان : المستقيمات و المستويات في الفضاء

بند 1 – 10

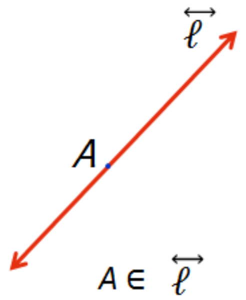
علاقة نقطة بنقطة في الفضاء

النقطتان مختلفتان

النقطتان منطبقان

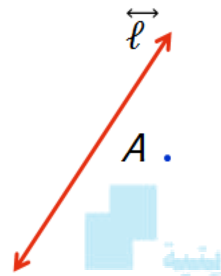
علاقة نقطة بنقطة بمستقيم

النقطة ∈ المستقيم



$A \in \overleftrightarrow{\ell}$

النقطة ∉ المستقيم



$A \notin \overleftrightarrow{\ell}$

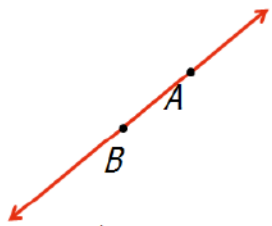
مسلمات (موضوعات) الفضاء

المسلمة (الموضوعة)

هي عبارة أولية (رياضية) نسلم بصحتها (نقبلها) دون برهان .

a

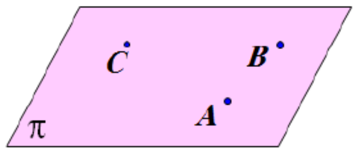
(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط)



(ii) كل مستقيم في الفضاء يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين

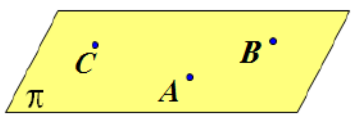
b

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة



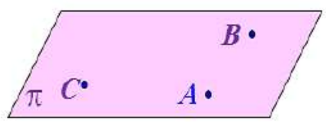
A , B , C ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة

(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة و ليست على إستقامة واحدة يحويها مستو واحد

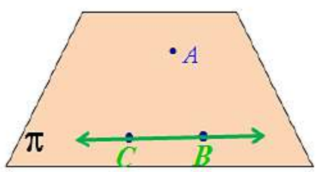


حالات تعيين المستوى فى الفضاء

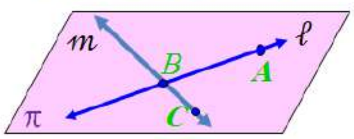
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على إستقامة واحدة تعين مستويا واحدا فقط



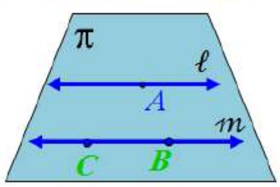
- أي مستقيم و نقطة خارجة عنه يعينان مستويا وحيدا فقط



- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا واحدا فقط

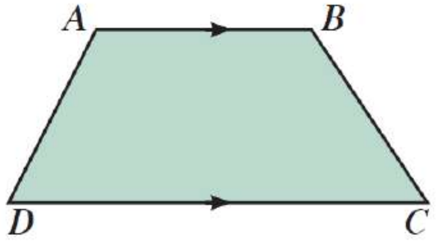


- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويا واحدا فقط



كتاب الطالب مثال صـ 119 رقم ١ :

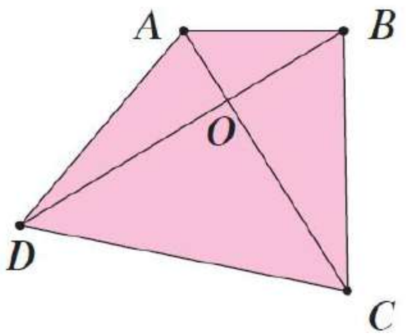
أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعا في مستو واحد



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 119 رقم ١ :

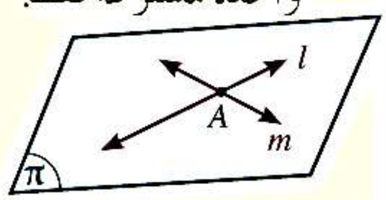
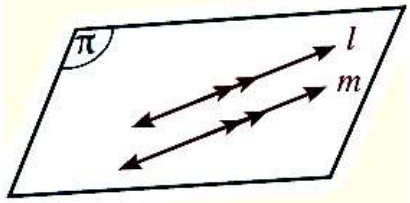
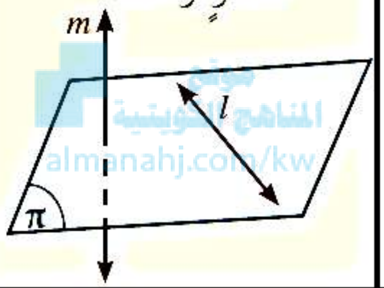
في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.



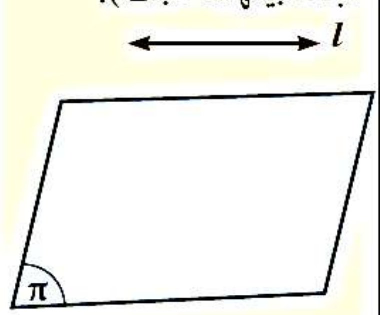
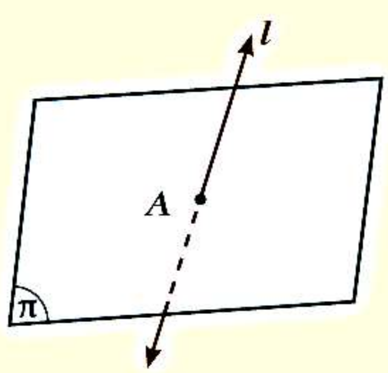
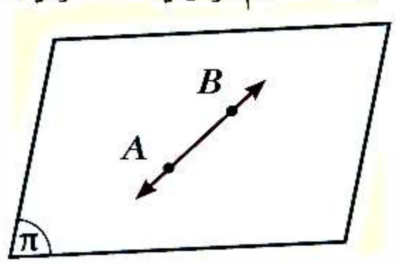
الأوضاع المختلفة لمستقيمان في الفضاء

يقال لمستقيمين مختلفين بالفضاء أنهما :

(a) متقاطعان إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 	(b) متوازيان إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين. 	(c) متخالفان إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ مستقيمان متقاطعان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi \ ,$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متوازيان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi \ , \ m \not\subset \pi$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ مستقيمان متخالفان

أوضاع مستقيم و مستوي في الفضاء

إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم و مستوي تسمح لنا

(a) صفر نقطة مشتركة: المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 	(b) نقطة مشتركة واحدة: المستقيم يقطع المستوي. 	(c) نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \ \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

التاريــخ : / /　　　　　　　　　　اليوم :

العنــــوان : **تابع المستقيمات و المستويات في الفضاء**　　　　**بند 1 – 10**

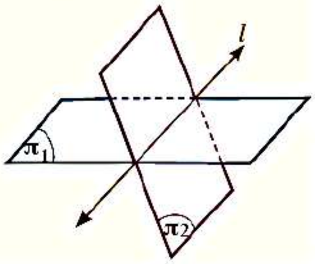
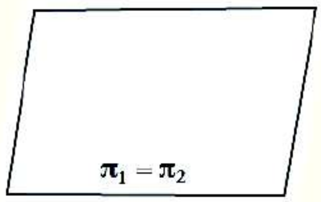
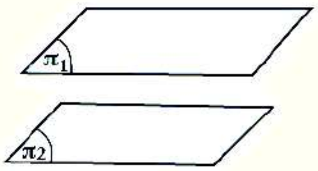
أوضاع مستويين في الفضاء

إذا إشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم

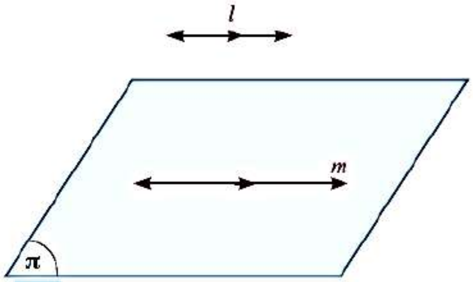
إذا إشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة و ليست على إستقامة واحدة يكون المستويان منطبقين

و يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات :

(a) المستويان متقاطعان في مستقيم.	(b) المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط).	(c) المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما).
		
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 // \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 // \pi_2$

نظرية (1)

إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي



$\because$ $\overleftrightarrow{l}$ خارج المستوي π.

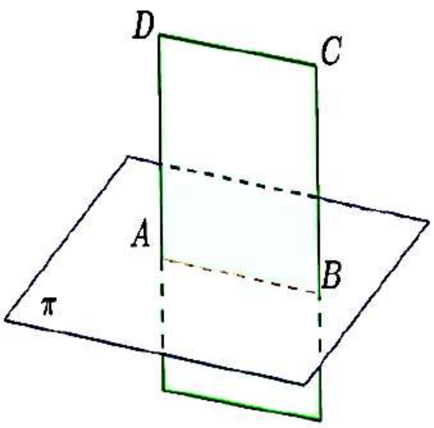
$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$

كتاب الطالب مثال صـ ١٢٥ رقم ١ :

في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$



اليوم :
التاريـــخ : / /

العنـــوان : تابع المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء

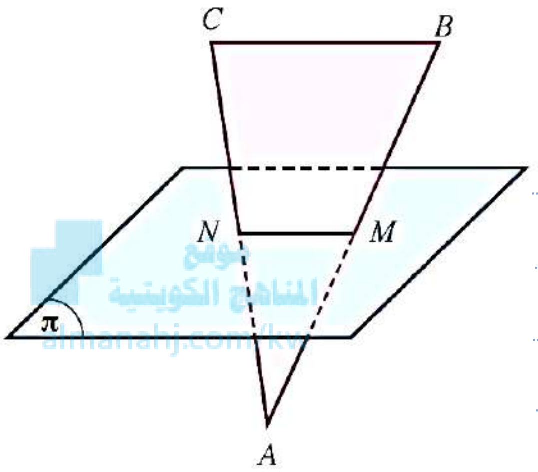
بند 2 – 10

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٢٥ رقم ١ :

في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،

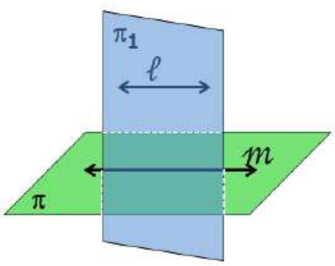
M ، N تنتميان إلى المستوى π .

أثبت أن $\pi \parallel \overleftrightarrow{BC}$.



نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويا ، فكل مستو مار بالمستقيم و يقطع المستوى ، يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .

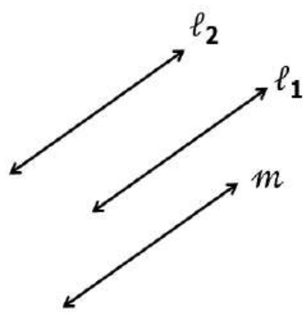


$\because \overleftrightarrow{\ell} \parallel \pi$ ، $\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_1$ ، $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{\ell}$

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيا



$\because \overleftrightarrow{\ell_1} \parallel \overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{\ell_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell_1} \parallel \overleftrightarrow{\ell_2}$

اليوم :   التاريـخ :   /   /

العنـــوان : تابع المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء   بند 2 – 10

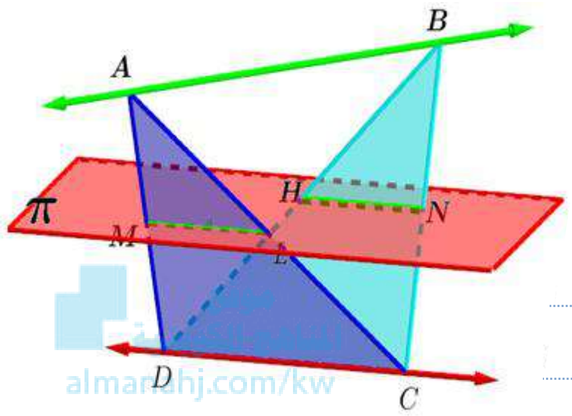
كتاب الطالب مثال صـ ١٢٦ رقم ٢ :

في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

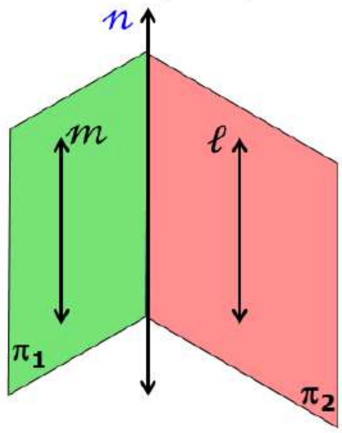


اليوم :   **التاريـخ** :   /   /

العنـــوان : **تابع المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء**   **بند 2 – 10**

نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان و مر بهما مستويان متقاطعان ، فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين



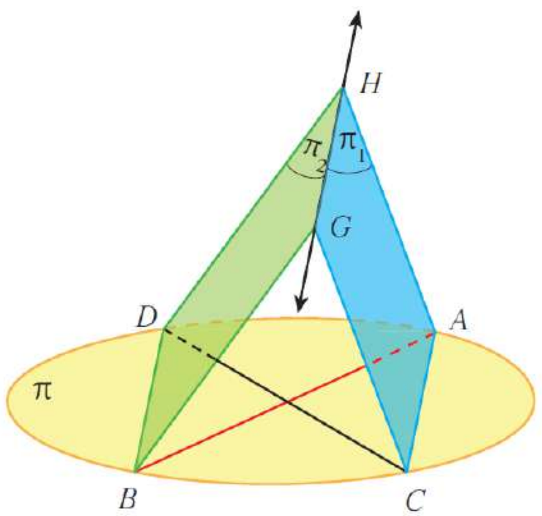
$\overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$ $\Longrightarrow$ $\overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{n}$

كتاب الطالب مثال صـ ١٢٦ رقم ٣ :

في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

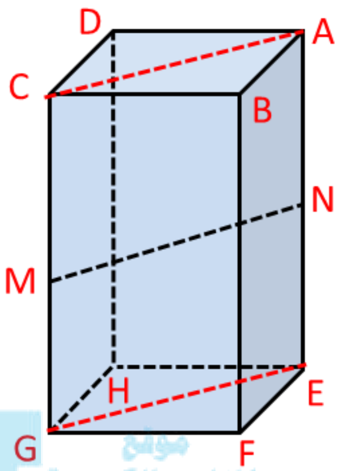
....

....

اليوم :   التاريـــخ :   /   /

العنـــوان : تابع المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء   بند 2 – 10

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٢٦ رقم ٣ :



$ABCDEFGH$ شبه مكعب.

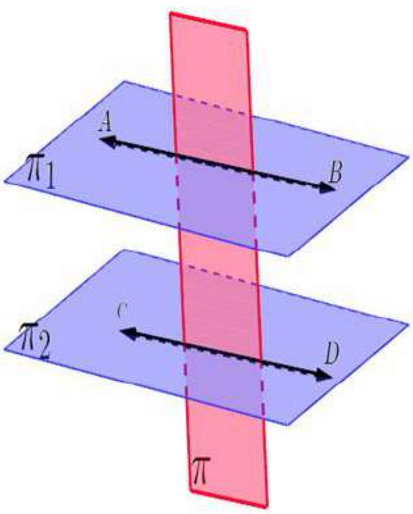
M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.

نظرية (4)

إذا قطع مستو مستويين متوازيين

فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين



$\because \quad \pi_1 \,//\, \pi_2$

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

اليوم :　　　　　　　　**التاريـــخ** :　　/　　/

العنـــوان : تابع المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء　　　　　بند 2 – 10

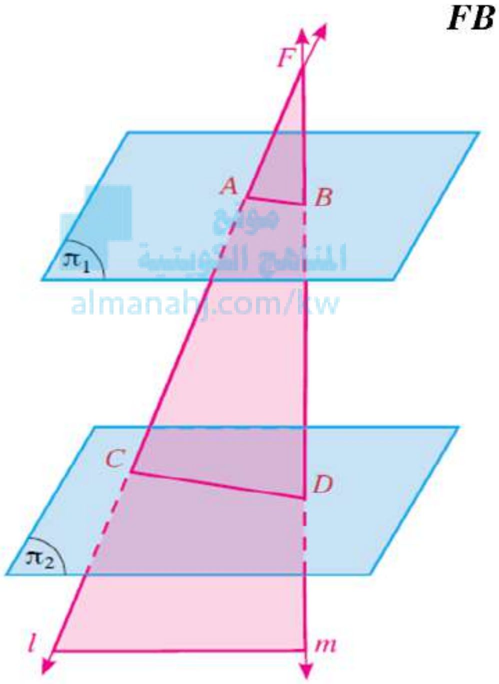
كتاب الطالب مثال صـ ١٢٦ رقم ٤ :

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$, $CD = 9 \text{ cm}$, $FB = 5 \text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB



اليوم :   التاريـــخ :   /   /

العنـــوان : **المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء**   **بند 2 – 10**

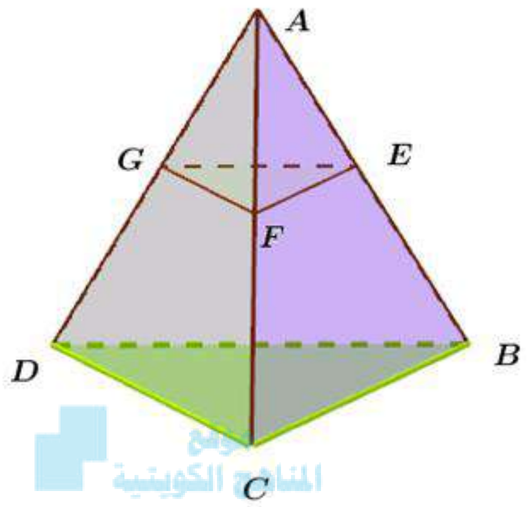
كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٢٦ رقم ٤ :

في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 ، π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC



كراسة التمارين صـ ٥٢ : البنود الموضوعية

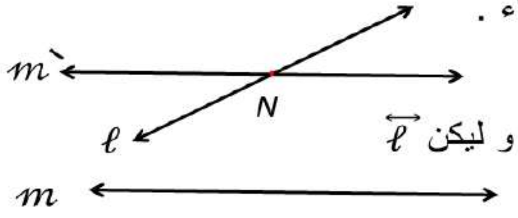
٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

العنـــوان : تعامد مستقيم مع مستو بند 3 – 10

الزاوية بين مستقيمين متخالفين

هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم قاطع له و مواز للأخر

$\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{\ell}$ مستقيمان متخالفان في الفضاء .



نأخذ النقطة N على أحد المستقيمين و ليكن $\overleftrightarrow{\ell}$

نرسم $\overleftrightarrow{m'}$ يوازي $\overleftrightarrow{m}$ و يمر بالنقطة N

الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\ell}$ ، $\overleftrightarrow{m}$ هي أحد الزوايا الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{m'}$ ، $\overleftrightarrow{\ell}$

$\hat{N}$ الزاوية الحادة بين المستقيمين m ، ℓ

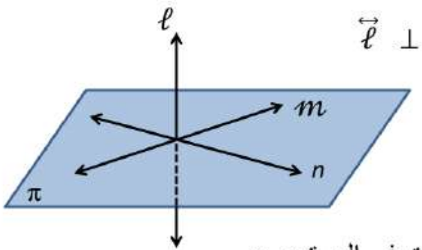
ملاحظة : لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N

تعريف

يكون المستقيم ℓ عموديا على المستوى π إذا كان $\overleftrightarrow{\ell}$ عموديا على جميع المستقيمات الواقعة في π و يرمز له بـ : $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$

نقول أيضا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{\ell}$ $\pi \perp \overleftrightarrow{\ell}$

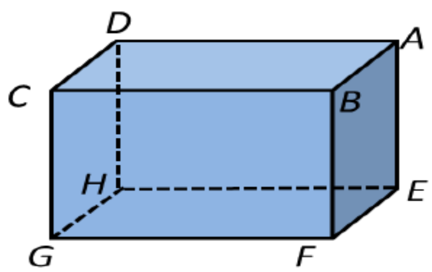
في الشكل المجاور : إذا كان $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$



فإن ℓ عموديا على كل المستقيمات في المستوى π

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديا على مستويهما

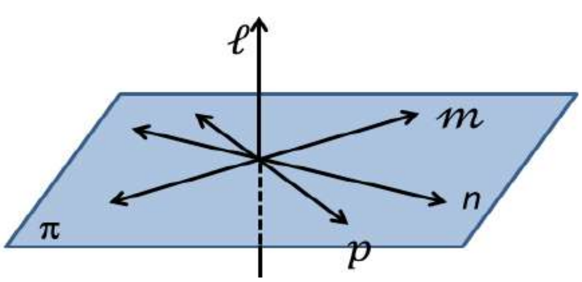


$\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\}$

$\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}$ ، $\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}$

$\overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$

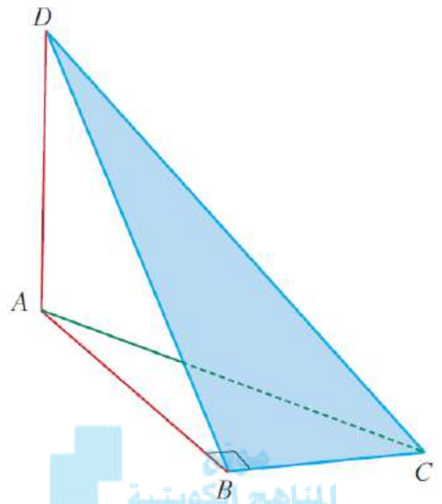
نتيجة (2)



جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواه في مستو واحد عموديا على المستقيم المعلوم

التاريـــخ : / /　　　　　اليوم :

العنـــوان : تابع تعامد مستقيم مع مستو　　　　　بند 3 – 10

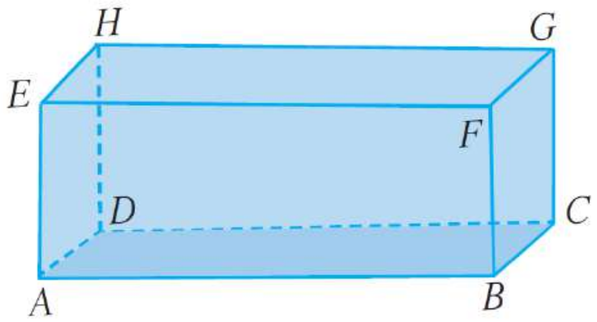


كتاب الطالب مثال صـ ١٣١ رقم ١ :

في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$



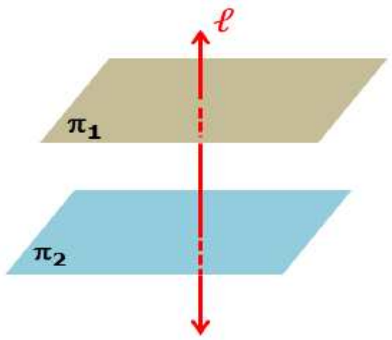
كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 132 رقم ١ :

في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.

نظرية (6)

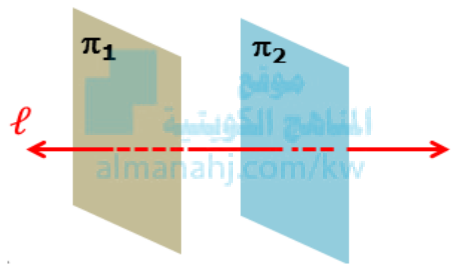
إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيان



$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2 \longrightarrow \pi_1 \ /\!/ \ \pi_2$$

نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الأخر



$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \ /\!/ \ \pi_2 \longrightarrow \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2$$

كتاب الطالب مثال صـ ١٣٢ رقم ٢ :

في الشكل المقابل:

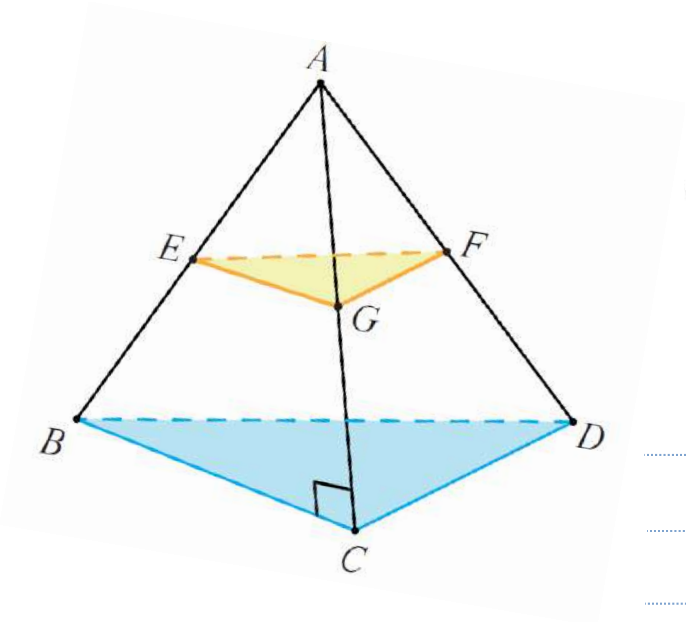
A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $CD = 5\text{ cm}$

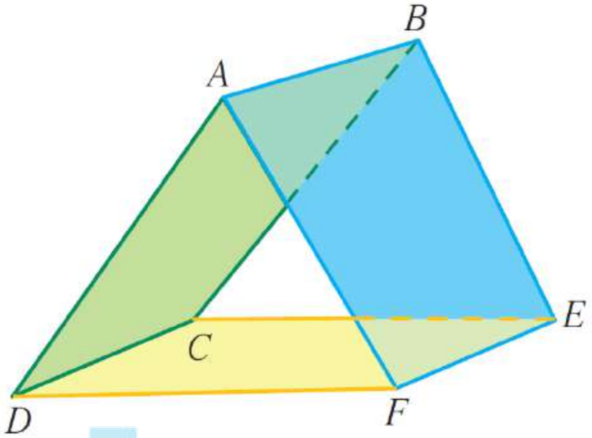
فأثبت أن: $(EGF) \ /\!/ \ (BCD)$.



التاريـــخ :   /   /   اليوم :

العنـــوان : تابع تعامد مستقيم مع مستو   بند 3 – 10

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٣٣ رقم ٢ :

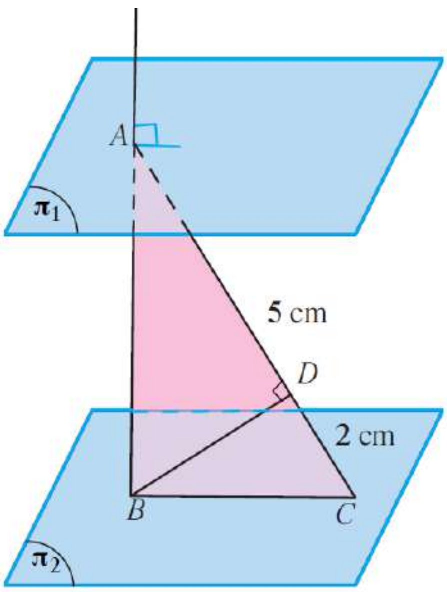


في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$

كتاب الطالب مثال صـ ١٣٤ رقم ٣ :



في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 \parallel \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $DC = 2\text{ cm}$ ، $AD = 5\text{ cm}$

أوجد: BD

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٣٤ رقم ٣ :

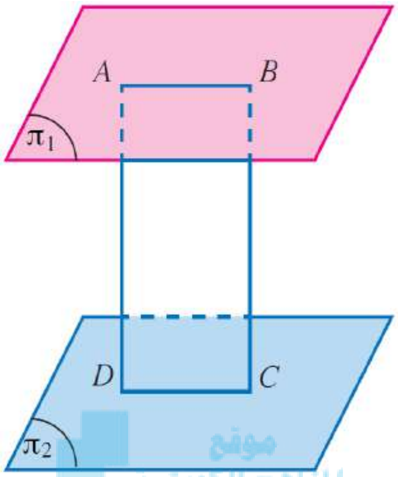
في الشكل المقابل: $\pi_2 \parallel \pi_1$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

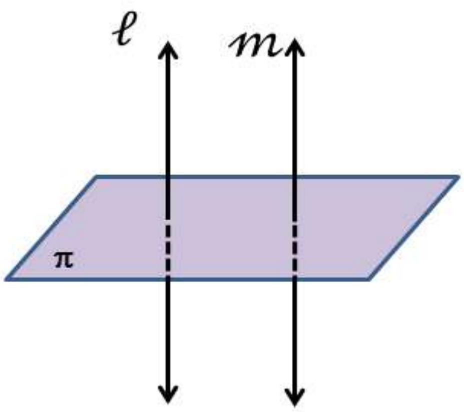
$\overline{BC} \perp \pi_2$ ، $\overline{AD} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.



نظرية (8) المستقيمان العموديان على مستو متوازيان .

$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$$



نظرية (9)

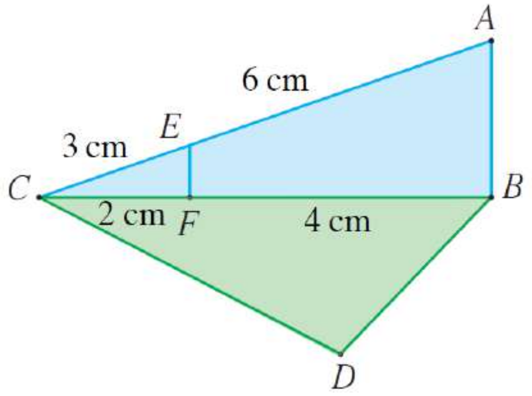
إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديا على مستو كان المستقيم الأخر عموديا على المستوى أيضا

$$\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

اليوم :   التاريـــخ :   /   /

العنـــوان : تابع تعامد مستقيم مع مستو   بند 3 – 10

كتاب الطالب مثال صـ ١٣٥ رقم ٤ :



في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $CE = 3\text{ cm}$, $EA = 6\text{ cm}$, $CF = 2\text{ cm}$, $FB = 4\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

كراسة التمارين صـ ٥٥ : البنود الموضوعية

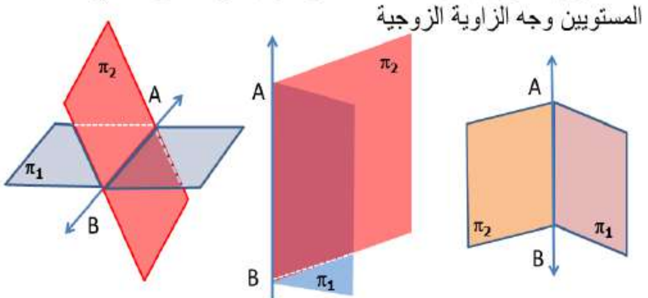
٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

العنـــوان : الزاوية الزوجية   بند 4 – 10

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية)

إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم و ينتج من هذا التقاطع أربع زوايا زوجية

يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلي نصفين و يسمى المستقيم المشترك حافة الزاوية الزوجية أو الفاصل المشترك و يسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية

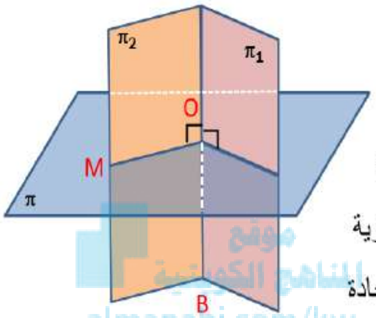


أو نرمز للزاوية الزوجية بحافتها فنكتب الزاوية $\overleftrightarrow{AB}$ ، $(\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2)$

الزوايا المستوية للزاوية الزوجية

هي الزاوية

التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستو عمودي على حافتها



و تكون قياس الزاوية الزوجية

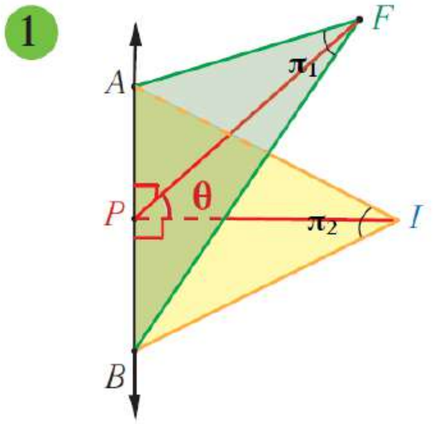
هو قياس إحدي زواياها المستوية

و دائما نأخذ قياس الزاوية الحادة

تدريب (1)

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين π_1 , π_2.

1



$\overline{FP} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{IP} \perp \overline{AB}$

حافة الزاوية الزوجية ....

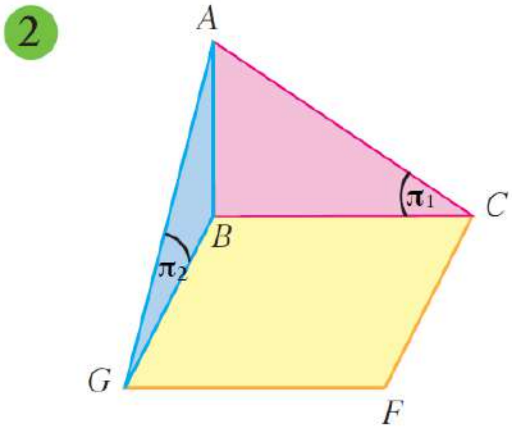
$...... \subset \pi_1$ ، $..... \perp \overline{AB}$

و كذلك $....... \subset \pi_2$ ، $...... \perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

2



$\overline{AB} \perp (CBGF)$

حافة الزاوية الزوجية ....

$\overline{BC} \subset \pi_1$ ، $...... \perp \overline{AB}$

و كذلك $......... \subset \pi_2$ ، $......... \perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

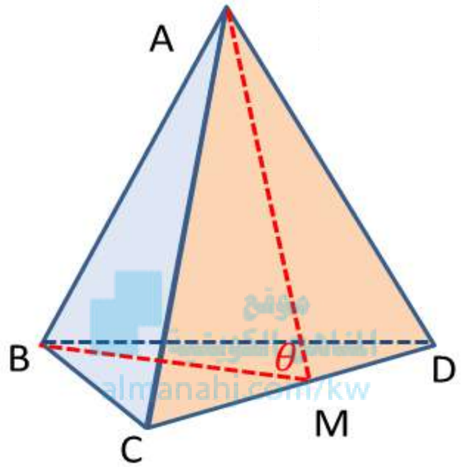
اليوم :　　　　　　　　**التاريـــخ** :　　/　　/

العنـــوان : تابع الزاوية الزوجية　　　　　　　　**بند 4 – 10**

كتاب الطالب مثال صـ 139 رقم ١ :

يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$

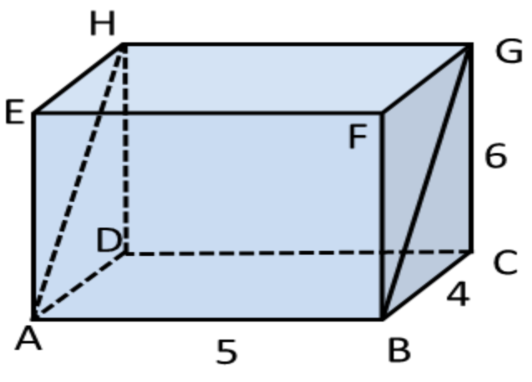


ⓐ حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

ⓑ أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

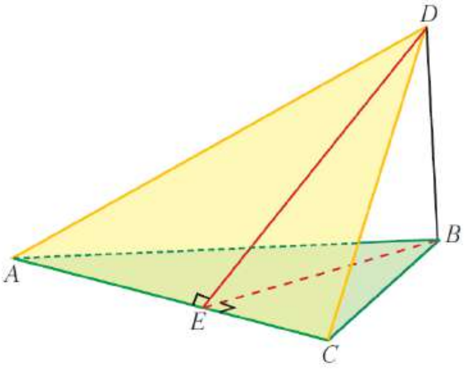
كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤٠ رقم ١ :

في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.



العنـــوان : تابع الزاوية الزوجية

كتاب الطالب مثال صـ ١٤٠ رقم ٢ :



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C)=\frac{\pi}{6}$ ، $AB=10\text{ cm}$ ، $DB=5\text{ cm}$

$\overline{DB}\perp(ABC)$ أوجد:

$\overline{BE}\perp\overline{AC}$ ،$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ (a) BE , DE

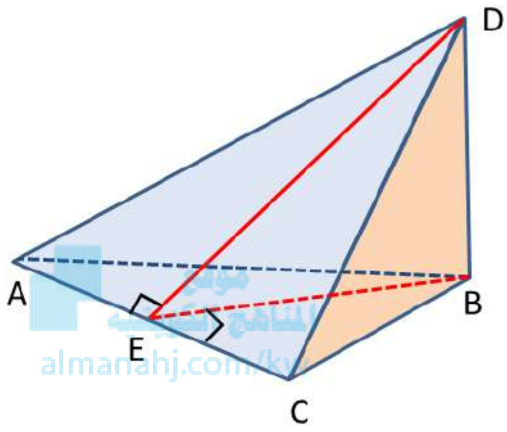
(b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

التاريــخ : / /　　　　اليوم :

بند 4 – 10　　　　**العنـــوان** : تابع الزاوية الزوجية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤١ رقم ٢ :

في المثال (2)، أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC إذا كان $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$.



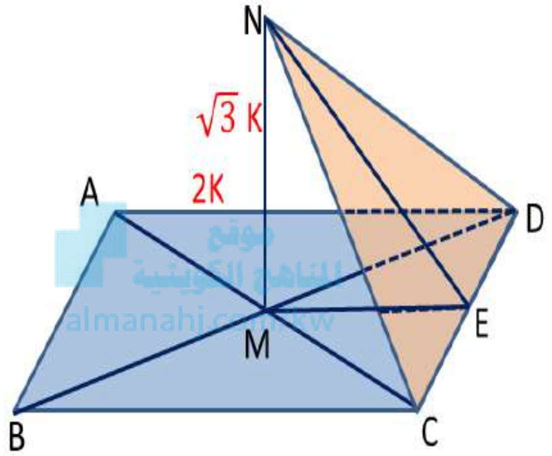
العنـــوان : تابع الزاوية الزوجية

كتاب الطالب مثال صـ ١٤٢ رقم ٣ :

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

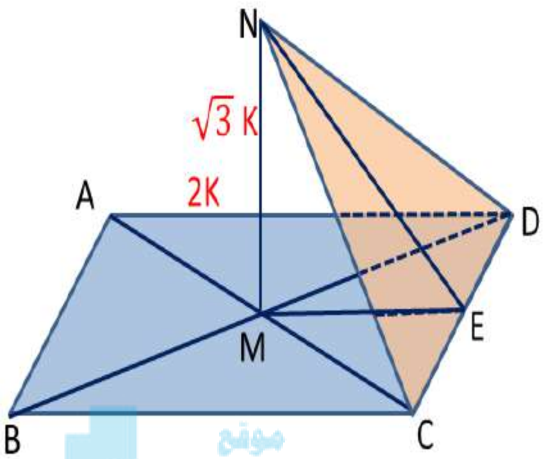
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤٣ رقم ٣ :

في المثال (3)، إذا كان $AB = 6k$

فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD , NBC$



كراسة التمارين صـ ٥٨ : البنود الموضوعية

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

مبدأ العد

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

كتاب الطالب حاول أن تحل ١ صـ ١٥٣ :

من مثال(1)

لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:

(a) عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.

(b) عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.

(c) عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

اليوم : التاريـــخ : / /

العنـــوان : تابع مبدأ العد بند 1 - 11

كتاب الطالب حاول أن تحل ٢ صـ ١٥٤ : من المثال (2)

لتكن: $B = \{0,3,4,5,7,9\}$

تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر المجموعة B

أوجد:

a عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5 000 الممكن تكوينها.

قانون التباديل

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n, r \in \mathbb{Z}^+ \ , \ n \geq r$

كتاب الطالب حاول أن تحل ٤ صـ ١٥٦ :

اشتركت 7 يخوت في سباق.
بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب؟

ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

كتاب الطالب مثال ٥ صـ ١٥٦ : حل المعادلات التالية:

a $\ {}_nP_5 = 6 \times {}_nP_4 \ , \ n \geqslant 5$

b $\ {}_6P_r = 4 \times {}_6P_{r-1}$

التاريـــخ :   /   /   اليوم :

بند 1 - 11   العنـــوان : تابع التباديل

تابع كتاب الطالب مثال ٥ صـ ١٥٦ : حل المعادلات التالية:

ⓒ $\frac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

كتاب الطالب حاول أن تحل ٥ صـ ١٥٧ : حل المعادلات التالية:

ⓐ ${}_nP_7 = 12 \times {}_nP_5$

ⓑ ${}_nP_7 = 12 \times {}_nP_5$

التاريـــخ :   /   /   اليوم :

بند 1 - 11   العنـــوان : التوافيق

قانون التوافيق

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n,\ r \in \mathbb{Z}^+\ ,\ n \geq r$

كتاب الطالب حاول أن تحل ٦ صـ ١٥٨ :

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي.
بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

في المثال (6): ⓐ بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب؟
ⓑ بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب؟
ⓒ ماذا تلاحظ؟

التاريـخ : / / اليوم :

العنـــوان : تابع التوافيق بند 1 - 11

كتاب الطالب حاول أن تحل ٩ صـ ١٦٠ :

يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعبًا. يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعبًا.

(a) أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها.

(b) أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز.

(c) أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا استثنى المدرب اللاعب عبد العزيز من تشكيلة الفريق بطريقتين مختلفتين.

التاريـــخ : / /　　　　اليوم :

بند 1 - 11　　　　العنـــوان : تابع التوافيق

كتاب الطالب مثال ١٠ صـ ١٦٠ :

أوجد قيمة n في كل مما يلي:

a $\quad {}_nC_3 = {}_nC_4$

b $\quad \dfrac{{}_nC_7}{{}_{(n-1)}C_6} = \dfrac{8}{7}$

كتاب الطالب حاول أن تحل ١٠ صـ ١٦٠ :

a $\quad {}_nC_2 = 105$

b $\quad {}_nC_4 = {}_nC_5$

كراسة التمارين صـ ٦٨ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

مثلث باسكال

$(x+y)^0$	row 1	1
$(x+y)^1$	row 2	1 1
$(x+y)^2$	row 3	1 2 1
$(x+y)^3$	row 4	1 3 3 1
$(x+y)^4$	row 5	1 4 6 4 1
$(x+y)^5$	row 6	1 5 10 10 5 1

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

خواص نظرية ذات الحدين — Properties of the Binomial Theorem

١) مفكوك $(x+y)^n$ يتضمن $n+1$ حدًّا يرمز لها بـ: $T_1, T_2, \ldots, T_{r+1}, \ldots, T_n, T_{n+1}$

٢) الحد الأول في المفكوك هو x^n، ثم ينقص أس x في الحدود التالية بمقدار الواحد على التوالي.

٣) يبدأ ظهور العدد y في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد y بمقدار الواحد على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون y^n.

٤) مجموع أسي x و y في أي حد من حدود المفكوك ثابت ويساوي الأس n.

٥) معامل الحد T_1 يساوي معامل الحد T_{n+1}، ومعامل الحد T_2 يساوي معامل الحد T_n، وهكذا ...

٦) الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

التاريـــخ : / / اليوم :

العنـــوان : تابع نظرية ذات الحدين بند 2 - 11

كتاب الطالب حاول أن تحل ١ صـ ١٦٤ :

استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

(a) $(x+y)^5$

....

(b) $(a-b)^4$

....

(c) $(2x-y^2)^5$

....

كتاب الطالب مثال ٢ صـ ١٦٤ :

في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

كتاب الطالب حاول أن تحل 2 صـ ١٦٥ :

في مفكوك: $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

كتاب الطالب حاول أن تحل ٣ صـ ١٦٦ :

أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-y)^5$

كراسة التمارين صـ ٧١ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

التجربة العشوائية

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة و لكن لا يمكن التأكد مسبقا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة

أنواع الأحداث

حدث بسيط Simple Event

مجموعة جزئية من فضاء العينة (S) تحوي ناتجًا واحدًا من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصرًا واحدًا) فإذا كان A حدثًا بسيطًا فإن $n(A) = 1$

حدث مركب Compound Event

مجموعة جزئية تحوي أكثر من ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية.

فإذا كان B حدثًا مركبًا فإن $n(B) > 1$

حدث مستحيل Impossible Event

مجموعة جزئية خالية $\varnothing$ من فضاء العينة (S)، فإذا كان D حدثًا مستحيلًا فإن $n(D) = 0$

حدث مؤكد Certain Event

مجموعة جزئية تساوي فضاء العينة (S)، فإذا كان F حدثًا مؤكدًا فإن $n(F) = n(S)$

حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events

يقال للحدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر أثناء التجربة.

أي أن: $A \cap B = \phi$ ويكون $n(A \cap B) = n(\phi) = 0$

حدث متمم Complement Event

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يحوي جميع عناصر فضاء العينة (S) التي لا تنتمي إلى الحدث A

نرمز إلى الحدث المتمم بالرمز $\overline{A}$

A، $\overline{A}$ هما حدثان متنافيان. ويكون: $A \cap \overline{A} = \phi$ ، $A \cup \overline{A} = S$

حدثان مستقلان dependant Events

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

التاريخ : / /   اليوم :

بند 3 - 11   العنوان : تابع الإحتمال

كتاب الطالب مثال ١ صـ ١٦٩ : في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

① اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

ⓐ A: ظهور عدد أكبر من 5

ⓑ B: ظهور عدد فردي

ⓒ C: ظهور عدد زوجي

ⓓ D: ظهور عدد أصغر من 7

② ⓐ أثبت أن B, C حدثان متتامان.

ⓑ بيّن فيما إذا كان الحدثان C, D متنافيان أم لا.

كتاب الطالب حاول أن تحل ١ صـ ١٧٠ : في أحد المخيمات الصيفية يشارك الطالب في مجموعة من الأنشطة وهي: كرة القدم، كرة السلة، كرة المضرب، الكرة الطائرة، السباحة وركوب الدراجات.

ⓐ اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

(1) A: المشاركة في كرة المضرب فقط.

(2) B: المشاركة في الأنشطة التي تستخدم فيها كرة كبيرة.

(3) C: المشاركة في الأنشطة التي لا تستخدم فيها كرة.

ⓑ (1) بيّن فيما إذا كان الحدثان B, C متتامان أم لا.

(2) أعط مثالاً عن حدثين متنافيين.

Probability　　الاحتمال

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

خواص الاحتمال لحدث ما

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

a) $0 \le P(E) \le 1$

b) إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

c) إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

d) مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة $= 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل ٢ صـ ١٧١ :

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

اختير طالب عشوائيًّا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

في المثال (2)

a) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟

b) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

....

....

....

....

....

....

....

اليوم :　　　　　　　　التاريـــخ :　/　/

العنـــوان : تابع الإحتمال　　　　　　　　بند 3 - 11

درست فيما سبق بعض القواعد التي تساعد في إيجاد احتمال بعض الأحداث A، B في فضاء العينة S:

A، B حدثان فإن		$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
A، B حدثان متنافيان	$\Longleftrightarrow$	$P(A\cap B)=0$
A، B حدثان مستقلان	$\Longleftrightarrow$	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A	$\Longleftrightarrow$	$P(\overline{A})=1-P(A)$

كتاب الطالب حاول أن تحل ٦ صـ ١٧٤ :

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

إحتمال ذات الحدين

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E و H تحقق فقط k مرّة، فبالتالي:

$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k}$$
$$= {}_nC_k \cdot m^k(1-m)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)} \cdot m^k(1-m)^{n-k}$$

يستخدم احتمال ذات الحدين:

- في حالة تكرار حدث عدة مرات.
- إذا كان للحدث **ناتجان فقط:**

ربح – خسارة، نجاح – فشل، كتابة – صورة، ...

كتاب الطالب حاول أن تحل ٧ صـ ١٧٥ :

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي:

عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات

ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

التاريـــخ : / /   اليوم :

العنـــوان : تابع الإحتمال   **بند 3 - 11**

كتاب الطالب حاول أن تحل ٨ صـ ١٧٥ :

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90%
ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

كراسة التمارين صـ ٧٤ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11